HEGEL UND DIE MATHEMATIK [1]

VON

REINHOLD BAER (Halle a. S.)

Die Mathematik ist die Lehre von *möglichen* Beziehungen zwischen *möglichen* Dingen. Beziehungen sowohl wie Dinge sind hierbei als ihrer Bedeutung entleert anzusehen, von jeder ihrer Besonderheiten ist zu abstrahieren. Dies letzte besagt, dass alle die Eigenschaften für den jeweiligen Aspekt unwesentlich sind, die bei Isomorphismen nicht erhalten bleiben. Dabei ist unter einem Isomorphismus eine solche umkehrbar eindeutige Zuordnung der Dinge eines Systems zu den Dingen eines anderen Systems, der Relationen zwischen den Dingen des ersten Systems zu denen des zweiten Systems verstanden, dass Dingen des ersten Systems, die eine der einschlägigen Relationen erfüllen bzw. nicht erfüllen, solche Dinge des zweiten Systems zugeordnet sind, die die zugeordnete Relation erfüllen, bzw. nicht erfüllen.[2]

Diesen fundamentalen Begriff wollen wir durch ein auch an sich interessantes Beispiel illustrieren, durch die *logistische Aufweisung* der *coincidentia oppositorum*. Der so genannte (engere) Aussagenkalkül betrachtet einen Bereich von Dingen, die "Aussagen" genannt werden, und zwischen denen, von abgeleiteten Beziehungen abgesehen, die Beziehungen: "Negation" und "Konjunktion (= sowohl … als auch …)" bestehen[3]. Man kann aber auch die Beziehungen "Negation" und "Disjunktion (= oder, nicht exclusiv, sondern im Sinn des lateinischen "vel")" zu Grunde legen. Es besteht dann die folgende Isomorphie, die eine Art Präzisierung des Dualismus zwischen Konjunktion und Disjunktion darstellt:

1. Jeder Aussage wird ihre Negation zugeordnet.
2. Die Grundbeziehung "Negation", wird sich selbst zugeordnet.
3. Der Grundbeziehung "Konjunktion" wird die Grundbeziehung "Disjunktion" zugeordnet.

Dass dies wirklich eine Isomorphie ist, folgt wesentlich aus dem Satz vom Widerspruch: a ≠ non-a, dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten: a = non-non-a, und der Tatsache,

---

[1] a) Verhandlungen des zweiten Hegelkongresses vom 18.-21. Okt.1931 in Berlin, (B.Wigersma, Hrsg.) J.C.B. Mohr, Tübingen, 1932, p.104 f.

b) Im folgenden werden die Hegelschen Werke nach der Lassonschen Ausgabe in der Meinerschen Philosophischen Bibliothek zitiert, und zwar:
1. Enzyklopädie der Philosophischen Wissenschaften im Grundrisse, 2. Aufl. (1920), zitiert mit Enz.
2. Phänomenologie des Geistes, 2. Aufl. (1921), zitiert mit Phän.
3. Wissenschaft der Logik, (1923), zitiert mit Log.

[2] Zu dieser relationstheoretischen Auffassung der Mathematik, die sich seit BERTRAND RUSSELLs Untersuchungen ziemlich allgemein durchgesetzt hat, vergl. etwa: R. CARNAP, *Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, Erkenntnis Bd. 1 (1930), S. 303-307, wo das, was hier nur angedeutet ist, eine etwas weitergehende Ausführung gefunden hat.

[3] Vergl. P. BERNAYS: *Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der "Principia mathematica"*, Math. Zeitschr. Bd. 25 (1926), S 305-320.

dass die Negation einer Konjunktion gleich der Disjunktion der Negierten ist: non-(a $\wedge$ b) = non-a $\vee$ non-b.

Diese Isomorphie besagt nun bei inhaltlicher Interpretation des Aussagenkalküls tatsächlich die behauptete *coincidentia oppositorum*: jede Aussage ist zwar von ihrer Negation verschieden, aber es besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen positiven und negativen Aussagen, sogar schärfer zwischen einer Aussage und ihrer Negation. Für diesen merkwürdigen Sachverhalt, dass zwei wohl unterschiedene Dinge in allem Wesentlichen übereinstimmen, sei ein von HEGEL gebrauchtes Beispiel angeführt: "Man kann daher nicht sagen, wie sich *Höhe*, *Länge* und *Breite* voneinander unterscheiden, weil sie nur unterschieden sein sollen, aber noch keine Unterschiede *sind;* es ist völlig unbestimmt, ob man eine Richtung Höhe, Länge oder Breite nennt"[4].

Der so charakterisierten Mathematik stellt sich nun die Aufgabe, gewisse mehr oder weniger konkret gegebene Sachverhalte mit ihren Mitteln zu beschreiben. Diese Sachverhalte können von außen an die Mathematik herangebracht werden (angewandte Mathematik, Physik), oder sie wachsen von innen heraus. Die ersten sind für uns weniger interessant, da es sich bei ihnen doch gewöhnlich darum handelt, mit hergebrachten Schematen zu arbeiten. Wichtiger sind die zweiten: die mathematische Forschung stößt auf ganz neue Sachverhalte und hat sie mit ihren Mitteln zu erfassen; oder aber es erweist sich, dass irgendwelche bereits seit langem mathematischer Bearbeitung unterworfene Sachverhalte unzulänglich erfasst sind. Es sei hier nur an die Bemühungen um die Grundlagen der Geometrie, der Mengenlehre und der Mathematik in den letzten 80 Jahren erinnert.

Hier stellen sich zwei Fragen:

1. Wie steht es mit der "Unfehlbarkeit der Mathematik," wenn sie dauernd genötigt ist, sich selbst zu revidieren?
2. Wie ist es möglich, über unzulänglich gegebene Sachverhalte etwas Vernünftiges auszusagen, insbesondere sie scharf erfassen?.

Eine positive Beantwortung der ersten Frage – und eine solche ist natürlich erwünscht – scheint nur möglich, wenn man auch die Mathematik historischer Betrachtungsweise unterwirft. Es ist nicht wahr, dass es einen absoluten Begriff von "richtig" und "falsch" gibt. Vieles von dem, was zu EUKLIDs Zeiten richtig war, war es zu GAUSS's Zeiten nicht mehr, und mancher Gauss'sche Beweis zu seiner Zeit ein Muster der Akribie – gilt heute als lückenhaft. Auch das Umgekehrte, dass für die Nachkommen etwas richtig ist, was für die Vorgänger falsch war, kommt vor, lässt sich aber meist nur schwer nachweisen. Man muss es sich einmal klar machen, dass auch solche Begriffe wie "richtig" und "falsch" von verschiedenen Mathematikergenerationen mit verschiedenem Inhalt erfüllt werden,[5] dass wir einer Generation Unrecht tun, wenn wir auf sie die

[4] Enz. S. 214 Man vergleiche auch die Tatsache, dass $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ verschieden, aber durch kein wesentliches Bestimmungsstück unterschieden sind, die sich in der Möglichkeit der Spiegelung der komplexen Ebene an der reellen Achse ausdrückt, eine Spiegelung, bei der alle geometrischen wie algebraischen Verhältnisse erhalten bleiben.

[5] Um die Erforschung dieses Sachverhalts hat sich schon FELIX KLEIN bemüht.

Begriffe einer anderen Generation anwenden. Es ist eine scharf umschriebene und durchaus lösbare Aufgabe zu ermitteln, was in einer bestimmten Zeit richtig und falsch ist, und ob ein konkret gegebenes Stück Mathematik in jener Zeit in ihrem Sinne richtig oder falsch ist. So kommt es auch, dass jede Generation die Totalität der Mathematik neu zu schaffen hat, dass es nichts gibt, was von der Vergangenheit ungeformt übernommen werden kann.[6] Diese durch die historische Entwicklung notwendige ständige Selbstrevision der Mathematik führt jetzt zu der zweiten Frage, wie es möglich ist, im Sinne der Mathematik unzulänglich Erfasstes, nicht eindeutig Bestimmtes doch mit der vollen Schärfe des mathematischen Apparates zu erfassen. Zunächst: *es ist nicht immer möglich.* Es gibt Begriffe, die wir völlig "haben", mit denen wir ganz vernünftig arbeiten können, und die doch eines jeden Versuchs einer scharfen Erfassung spotten. Einen Beweis für diese Behauptung hat schon ZENON in seiner bekannten Paradoxie vom "Haufen" geführt. Wir alle wissen genau, was ein Haufen ist und was nicht ein. Haufen ist, aber jeder Versuch einer genauen Abgrenzung der Begriffe "Haufen" und "Nicht-Haufen" gegeneinander trifft notwendig daneben. Das "Paradoxe" hieran ist übrigens nicht ein Widerspruch im Sinne heutiger Logistik – sondern nur – die, Inkongruenz. zwischen "gehabtem" und "gesetztem" Begriff[7], die dadurch entsteht, dass nur eine Seite, nur ein "Moment" des Begriffs gesetzt werden kann; oder wie HEGEL es ausdrückt: "– und es ist überall *gar nichts*, worin nicht der Widerspruch, d.i. entgegengesetzte Bestimmungen[8] aufgezeigt werden können und müssen; – das Abstrahieren des Verstandes ist das gewaltsame Festhalten an *einer* Bestimmtheit, eine Anstrengung, das Bewusstsein der anderen Bestimmtheit, die darin liegt, zu verdunkeln und zu. entfernen."[9] Dieser Zenonische Unmöglichkeitsbeweis lehrt aber noch mehr; es ist gar nicht nötig, einen Begriff schon mit voller Schärfe erfasst zu haben, um mit ihm arbeiten zu können. Es genügt, ihn zu "haben", genau um ihn zu wissen; dann kann die Mathematik einzelne seiner Momente herausgreifen, "setzen", wenn es ihr vielleicht auch unmöglich sein mag, ihn in seiner Totalität zu fassen. So werden wir uns nicht wundern dürfen, dass die Mathematik zwar im Sinne der Logistik widerspruchsfrei sein kann, aber doch in dialektische Verwicklungen gerät, wenn sie es unternimmt, einen solchen Begriff, der nur "gehabt" aber nicht "gesetzt" werden kann, zu erfassen.[10]

Wie die mathematischen Begriffe im Laufe der historischen Entwicklung sich wandeln, so auch der Begriff von der Mathematik[11]. Der von uns vorgetragene hat seine Ausprägung eigentlich erst um die Jahrhundertwende gefunden. Das, was ihn vom klas-

---

[6] Und es ist wohl nicht einmal unhegelsch gedacht, wenn jede Generation ihren Zustand verabsolutiert und die Vergangenheit nur als Momente in der Entwicklung auffasst.

[7] Zu dieser Unterscheidung vergl. auch FRITZ BASSENGE: *Hexis und Act*, Philosophischer Anzeiger 1930.

[8] HEGEL versteht unter Widerspruch nicht den Widerspruch im Sinne der Logistik, sondern nur den Gegensatz im oben aufgezeigten Sinne. -Vergl. auch hierzu etwa H. LFISFGANG, *Denkformen* – Berlin und Leipzig, 1928, S. 186: "Diese Isolierung einer Eigenschaft, dieses Losreissen vom Ganzen ist es ja gerade, was HEGEL unter "Gegensatz" versteht".

[9] Enz. S. 114. Vergl. hierzu noch Anm.1) Seite 108. In dem dort angeführten Beispiel wird das Entstehen des Gegensatzes durch das "gewaltsame Festhalten an einer Bestimmtheit" noch deutlicher.

[10] Vergl. hierzu auch das bekannte Beispiel der Peanokurve, das zeigt, dass der Kurvenbegriff, der durch die Isolierung des Moments "Weg" entstand, zu weit ist, indem er auch die Fläche des Quadrates unter sich fasst.

[11] Ein gleiches gilt von der mathematischen Denkform, was hier im Widerspruch zu manchen Autoren festgestellt sei; vergl. für die - entgegengesetzte Meinung z.B. LEISEGANG a.a.O., S. 1-2.

sischen, eigentlich schon durch PLATON, EUDOXOS, EUKLID ausgebildeten Begriff der Mathematik am wesentlichsten unterscheidet, ist die Bedeutungsleere. Denn den klassischen Mathematikern waren die mathematischen Entitäten Wirklichkeiten (dies beruht wohl wesentlich darauf, dass der beschriebene Tatbestand, etwa der Anschauungsraum, und das der Beschreibung dienende mathematische Schema, der dreidimensionale Euklidische Raum, identifiziert wurden); über sie werden *wahre*, Aussagen gemacht. Die moderne Mathematik dagegen versucht nur noch richtige Aussagen über Dinge zu machen, die allein durch ihre Beziehungen untereinander charakterisiert sind[12]. Es ist dies mit Einschränkung der Fortschritt von KANT zu HEGEL; die Alten suchten nach dem "Ding an sich", während wir das Wesen der mathematischen Dinge in ihrem "Sein-für-anderes" sehen und HEGELs Meinung zu der unsrigen machen: "Die Dinge heißen ansich, insofern von allem Sein-für-Anderes abstrahiert wird, das heißt überhaupt, insofern. sie ohne alle Bestimmung, als Nichtse gedacht werden"[13].

Hier müssen wir allerdings ehrlicherweise zugestehen, dass HEGEL diese moderne Auffassung sicher nicht gekannt hat, und sie, wäre sie ihm bekannt geworden, wenigstens in ihrer vollen Radikalität sich nicht zu eigen gemacht hätte. "Die Axiome" (insonderheit der Geometrie) "bedürfen daher so gut als die Definitionen und Einteilungen an und für sich betrachtet eines Beweises und werden nur darum nicht zu Lehrsätzen gemacht, weil sie als relativ erste für einen gewissen Standpunkt als Voraussetzungen angenommen werden"[14]. Hier wird also die Geometrie einzig und allein als Beschreibung konkreter Sachverhalte angesehen. Manches bei HEGEL deutet allerdings darauf hin, dass er sich die Bedeutungsleere der Mathematik, soweit sie wenigstens von Geometrie verschieden ist, schon zu eigen gemacht hatte. "Mit solcher Unwirklichkeit, als die Dinge der Mathematik sind, gibt sich weder das konkrete sinnliche Anschauen, noch die Philosophie ab. In solchem unwirklichen Elemente gibt es denn auch nur unwirkliches Wahres"[15]. Andererseits ist aber sicher seine Vorstellung von mathematischer Denkform nicht die unsrige. Während wir heute nämlich, hierin wieder an EUKLID anknüpfend, das Wesen der Mathematik im Mathematisieren finden, im lebendigen verstehenden Verknüpfen der Fakten, die Sätze aber nur als Ruhepunkte, die Überschau zu erleichtern, ansehen, meint HEGEL: "Die Bewegung des mathematischen Beweises gehört nicht dem an, was Gegenstand ist, sondern ist ein der Sache äußerliches Tun"[16]. Im mathematischen Erkennen ist die Einsicht ein, für die Sache äußerliches Tun."[17] Heute ist uns aber die "Einsicht" und die "Bewegung des Beweises" die Sache. Schließlich ist ihm auch die allgemein relationale Auffassung der Mathematik fremd. "Denn es ist die Größe, der unwesentliche Unterschied, den die Mathematik allein betrachtet. Dass es der Begriff ist, der den Raum in seine Dimensionen entzweit und die Verbindungen derselben und in denselben bestimmt, davon abstrahiert sie"[18]. Hier wie

[12] Man kann die eine Seite dieses Gegensatzes auch dahin charakterisieren: der klassischen Mathematik ist nur das "Wirkliche" möglich, während für die moderne alles "Mögliche" Wirklichkeit hat.

[13] Log. I., S. 108.

[14] Log. II, S. 466

[15] Phän., S. 29-30.

[16] Phän., S. 28.

[17] Phän., S. 28.

[18] Phän., S. 30.

in den meisten Punkten, in denen HEGELs Meinung sich von unserer Auffassung trennt, ist er der seiner Zeitgenossen treu.

Damit kommen wir zu einer Überlegung, die für das Verständnis von HEGELs Verhältnis zur Mathematik, (wie wohl zu jeder Einzelwissenschaft) fundamental ist: HEGEL wollte, wenn er die Mathematik in sein System einordnete, nur die ihm bekannte Mathematik seiner Zeit vernünftig begreifen[19]. Er steht also der Mathematik nicht etwa konstruktiv aufbauend gegenüber, sondern schlicht die ihm von den Fachleuten, entgegengebrachten Tatsachen, begreifend. "Es handelt sich gar nicht um eine logische Deduktion in der sich ein Urteil an das andere, ein Schluss an den anderen reiht, sondern um die Beschreibung eines Sachverhaltes"[20]. Diese Einstellung macht ihn nicht kritiklos, im Gegenteil, er wird sogar sehr gründliche Kritik üben, wenn die Mathematik seiner Zeit sich missversteht, aber im Ganzen ist ihm doch Wissen und Können seiner Zeitgenossen unantastbar und muss infolgedessen, von ihm philosophierend erfasst werden. So tut er meist eher seinem System Gewalt an, als den so genannten Tatsachen, auf so tönernen Füssen sie auch stehen mögen. Er scheint hierin dem philosophierenden Mathematiker ähnlich, der seine Ergebnisse philosophisch unterbauen will und dazu eine "passende" Philosophie post rem erfindet. Aber er unterscheidet sich vom philosophierenden Mathematiker himmelweit dadurch, dass dieser die Philosophie zu seiner Rechtfertigung braucht, also etwa, wie das in der Geschichte der Mathematik vorgekommen ist, ein ungelöstes Problem wegphiloso-phieren wird, während HEGEL nur die festen Tatsachen einzuordnen und zu verstehen unternimmt, vergleichbar etwa dem Philologen, der wohl eine korrupte Stelle seiner Texte zu verbessern sucht, im übrigen aber sie nur deutet, sie. als vorliegende, nicht weiter zu kritisierende Tatsache hinnimmt.

Für den nachgeborenen Mathematiker erscheint dadurch manches bei HFGEL, kraus, was eben nur höchste Weisheit seiner Zeit war aber näheres Zuschauen ergibt hier und dort, dass HEGEL, hätte er nur nicht so treu seinen Zeitgenossen geglaubt, sondern geradlinig seine Gedanken zu Ende gedacht, manches antizipiert hätte, was höchste Errungenschaft der letzten 80 Jahre ist.

Wollen wir also HFGELs Stellung zur Mathematik kennen lernen, so müssen wir zunächst feststellen, was. "man" zu seiner Zeit wusste und wie der Umkreis seines Wissens sich darstellte. Für unsere Betrachtung kommen dann in erster Linie solche Gebiete in Frage, bei denen eine nicht zu große Diskrepanz zwischen dem "Damals" und dem "Heute"' besteht.[21]

Völlig ausscheiden aus unserer Betrachtung müssen wir die *Euklidische Geometrie*. Denn erst den Zeitgenossen HEGELs begann auf diesem Gebiet eine erste Ahnung davon aufzugehen, dass es zweierlei ist: Anschauungsraum, Sehraum, physikalischer Raum etc. einerseits und mathematisch untersuchter, erfasster Euklidischer Raum

[19] Vergl. etwa TH. HAERING: *Hegel, Sein Wollen und sein Werk*, Bd. I, Leipzig und Berlin 1929, S. 756.

[20] LEISEGANG, a.a.O., S. 184.

[21] Dabei dürfen wir das "Damals" natürlich nicht durch Wissen und Können der Spitzen charakte-risieren. HRGEL stand sicher nicht an der Front der mathematischen Geschehnisse seiner Zeit, aber er wird wohl das Niveau des mathematischen Universitätsunterrichts gehalten haben.

andererseits. Dass es zum Beispiel durchaus nichts im Begriffe eines Paares von Raumpunkten Liegendes ist, einen bestimmten Abstand zu haben, war wohl für HEGEL noch unfassbar. "'Die gerade Linie hat ein empirisches Quantum,"[22] sagt er und zeigt damit deutlich die selbstverständliche Vermischung von Anschauungsraum und mathematischem Raum. Allerdings hat er von den axiomatischen Bemühungen gehört – an der Untersuchung des Parallelenaxioms und der Auffindung der übrigen geometrischen Axiome, abgeschlossen erst um die Jahrhundertwende, hat sich ja der moderne Begriff der Mathematik entwickelt aber es ist ihm nicht wohl dabei. "In manchen andern Lehrsätzen" (der Geometrie) "hat man Voraussetzungen zu entdecken geglaubt, welche nicht unmittelbar hätten angenommen werden sollen, sondern zu beweisen gewesen wären."[23] So sind ihm die Begriffe und Grundsätze der Geometrie noch selbstverständlich gehabte," – trotz aller berechtigten Verachtung der Anschauung: "Es ist gegen diese Flachheit die flache Erinnerung zu machen nötig, dass durch das Anschauen keine Wissenschaft zustande komme, sondern allein *durchs* – *Denken*.[24] Und mithin wird ihm alles .Bemühen um ihre Erfassung notwendig unverständlich sein.

Neben der Euklidischen Geometrie stand im Vordergrund von HEGELs mathematischen Interessen die so genannte *reelle Analysis.* Diese hat im verflossenen Jahrhundert ebenfalls tiefgehende Wandlungen erfahren. Denken wir zunächst an die reellen Zahlen. Auch sie "hatte" man damals, wenn auch schon nicht mehr ganz unreflektiert. Immerhin war die Kritik, die zu PLATONs Zeiten an diesen Begriffen geübt wurde, ebenso wie die großartige Eudoxische Theorie der reellen Zahlen damals ziemlich vergessen. So wird es verständlich, wenn HEGEL – hierin den meisten seiner mathematischen Zeitgenossen nichts nachgebend – bei den reellen Zahlen in erster Linie an die rationalen Zahlen dachte. Von der Existenz der "Inkommensurablen"' wusste er wohl, aber sie waren nur "gesetzt", nicht "gehabt", verlangten jedes Mal eine besondere Besinnung und waren ganz und gar nicht selbstverständlich. So ging man davon aus, dass im Grunde reelle Zahl gleich rationaler Zahl sei, und dass etwa fehlende Irrationalitäten sich durch Wurzelziehen und andere "fast rationale" Operationen gewinnen ließen. Alle weiteren Lücken musste dann der Begriff der' Kontinuität zudecken: "Die Kontinuität ist also einfache, sich selbst gleiche Beziehung auf sich, die durch keine Grenze und Ausschließung unterbrochen ist, aber *nicht unmittelbare* Einheit, sondern Einheit der fürsichseienden Eins. Es ist darin das *Außereinander der Vielheit* noch enthalten, aber zugleich als ein nicht Unterschiedenes, *Ununterbrochenes*."[25]

Haben so HEGEL und seine Zeitgenossen ein en Begriff der reellen Zahl, der dem unsrigen nicht unähnlich ist, ihm in seiner Tendenz wenigstens nahe kommt, wenn auch seine Analyse unvollständig sein mag, so ist der *Funktionsbegriff* inzwischen ungeheuer erweitert worden. Die Weite, die der Funktionsbegriff heute gewonnen hat *willkürliche* Zuordnung reeller Zahlen zu reellen Zahlen – stammt erst von DIRICHLET. Dass Reihen, Integrale usw. neue Funktionen definieren, dafür hatte man damals im allgemeinen noch wenig Gefühl; Logarithmus und Wurzel erscheinen als "Operatoren"

[22] Log. I, S. 289.
[23] Log. II, S. 466.
[24] Log. II, S. 472.
[25] Log. I, S. 179-1180.

wie das Differentieren und Rechnen, aber noch nicht als "Funktionen." So kommt es, dass sich für HEGEL der Kreis der Funktionen fast auf die elementaren beschränkt, kaum ein Gefühl für weitere Möglichkeiten bestand. Damit erklärt sich leicht der schiefe Aspekt, der gelegentlich der Differential- und Integralrechnung entgegengebracht wird: "Hierauf beruht bei ihnen allein der *Fundamentalsatz*, nämlich die Bestimmung dessen, was das Differential eines Produktes oder einer Potenz sei, *denn hierauf reduziert sich die ganze theoretische Lehre*."[26]

Um so erstaunlicher ist es, wie überraschend klare Einsichten er dann doch über die Grundlagen dieser Theorie hat: "dx, dy sind keine Quanta mehr, noch sollen sie solche bedeuten, sondern haben allein in ihrer Beziehung eine Bedeutung, *einen Sinn bloß als Momente*,"[27] eine Einsicht, aus der mancher Nachgeborne lernen könnte. Die Unsinnigkeit des Differentials als einer positiven Größe, die kleiner ist als jede positive Größe, die Verwischung der Begriffe "Größe" und "Funktion" u.ä. hat er scharf kritisiert und jedenfalls besser durchschaut als viele Mathematiker seiner Zeit.

So bleiben uns schließlich noch HEGELs Bemühungen um den *Zahlbegriff*.

Die Begründung des Zahlbegriffs ist eines der heikelsten Probleme der Mathematik. Hier ist sie genötigt, sich in einer fast zirkelhaften Weise auf sich selbst anzuwenden, sich gleich MÜNCIIHAUSEN am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. Dass dieses Problem eine restlose Klärung gefunden hätte, lässt sich nicht behaupten; es scheint eine der Stellen zu sein, wo die Mathematik irgendwie über sich hinausweist.

Es handelt sich um folgendes: Was Zahlen sind – gemeint sind zunächst die natürlichen Zahlen – wissen wir; um sie mit dem Apparat der Mathematik zu erfassen, müssen wir erst diesen Apparat haben, und zwar ziemlich vollständig; um aber den mathematischen Apparat aufzubauen, dazu brauchen wir nicht nur ein paar Zahlen wie 1, 2, 3, sondern die ganze Reihe der natürlichen Zahlen, insonderheit die vollständige Induktion, die übrigens bei HEGEL eine auffallend geringe Rolle spielt[28]. Hier ist vorläufig der Mathematiker genötigt, mit dem nur "gehabten" Begriff der natürlichen Zahl und der vollständigen Induktion zu arbeiten, bis er einen davon verschiedenen, neuen innermathematischen Zahlbegriff aufgebaut hat[29].

Es ist nun interessant zu beobachten, dass HEGEL gerade bei der Begründung des Zahlbegriffs seiner Zeit weit voraus ist, dass er die Entwicklungen des letzten Jahrhunderts im großen Umfange vorausgeahnt hat.

---

[26] Log. I, S. 264. Dabei ist doch die durch eine Funktion hergestellte Beziehung zwischen Variabler und Funktionswert dem Potenzenverhältnis ganz analog: "so ist es" (das Quantum) "im Potenzenverhältnis *gesetzt*; sein Anderssein, Hinausgehen über sich in ein anderes Quantum, als durch es selbst bestimmt." (Log. I., 332).

[27] Log. I., S. 254.

[28] Wenn sie ihm nicht überhaupt unbekannt war. Es scheint dies für das Verständnis seiner Einstellung zum Unendlichen, insonderheit dem Schlecht-Unendlichen, wesentlich.

[29] Vergl. hierzu z.B. J. von NEUMANN, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, Math. Zeitschr., Bd. 26 (1927), S. 1-46.

Zunächst können wir feststellen, dass HEGEL (wenigstens was die Arithmetik betrifft) die Bedeutungsleere der arithmetischen Entitäten in vollem Umfange erkannt hat. "Das Leere ist so die Qualität des Eins in seiner Unmittelbarkeit."[30] "Sie" (die Arithmetik) "hat keinen konkreten Gegenstand, welcher innere Verhältnisse an sich hätte, die zunächst für das Wissen verborgen, nicht in der unmittelbaren Vorstellung von ihm gegeben, sondern erst durch die Bemühung des Erkennens herauszubringen wären"[31]. Schließlich verkündet er noch die relationale Auffassung der Zahlen: "Die *Arithmetik* betrachtet die Zahl und deren Figuren, oder vielmehr betrachtet sie nicht, sondern operiert mit denselben."[32] Erkennen wir aber erst einmal als das Wesentliche der Zahlen die mit ihnen auszuführenden *Operationen*, so ergibt sich von selbst der Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen; denn wesentlich zwei Operationen werden mit Zahlen ausgeführt: *Zählen und Rechnen*. Diese beiden Momente des nur "gehabten", noch nicht mathematisch gefassten Zahlbegriffs führen zwangsläufig zu verschiedenen, sich i.a. sogar ausschließenden "Setzungen."

Das primitivere der beiden Momente ist das Zählen. "Das *erste* Erzeugen der Zahl ist das Zusammenfassen von Vielen als solchen, d.i. deren jedes nur als *Eins* gesetzt ist, das *Nummerieren"*.[33] Die Zahl ist also zunächst Zahl einer Menge von Elementen, die durch sie "gezählt" werden, die im übrigen untereinander durch keine wesentliche Bestimmung unterschieden sind. Damit ist dann auch gesagt, dass zwei Mengen dann und nur dann durch die gleiche Zahl gezählt werden, wenn sie zur Deckung gebracht werden können, wenn es möglich ist, sie umkehrbar eindeutig aufeinander zu beziehen. "Die *Vielen* sind aber das *eine was* das *andere* ist, jedes ist Eins oder auch Eins der Vielen".[34] Es handelt sich also um Isomorphismen, die nur die Gleichheitsrelation, treu abbilden. "Die Quantität ist das so in sich zurückgekehrte Sein, dass es einfache Gleichheit mit sich als Gleichgültigkeit gegen die Bestimmtheit ist"[35]. Das besagt also, dass das Quantum das Moment der Kardinalzahl als Invariante gegenüber umkehrbar eindeutigen Abbildungen in sich fasst. Damit hat HEGEL diesen fundamentalen Begriff, der erst ein halbes Jahrhundert später von GEORG CANTOR und DEDEKIND erfasst wurde, in etwas antizipiert.

Die Kardinalzahl stellt aber nur ein Moment der Zählzahl dar, ihr anderes Moment ist die Ordinalzahl.

"So stellt man im Quantitativen der Zahl etwa hundert so vor, dass das hundertste Eins allein die Vielen so begrenze, dass sie hundert seien. Einerseits ist dies richtig; andererseits aber hat unter den hundert Eins keines einen Vorzug, da sie nur gleich sind; jedes ist ebenso das hundertste; sie gehören also alle der Grenze an, wodurch die Zahl, hundert ist; diese kann für ihre Bestimmtheit keines entbehren … Die Anzahl ist daher nicht eine Vielheit *gegen* das umschließende, begrenzende Eins, sondern macht selbst diese Begrenzung aus, welche ein bestimmtes Quantum ist; die Vielen machen eine

[30] Log. I., S. 155.
[31] Log. I., S. 208.
[32] Log, I., S. 200.
[33] Log. I., S. 201.
[34] Enz. S. 118.
[35] Log. I., S. 336.

Zahl, *Ein* Zwei, Ein Zehn, Ein Hundert usf. aus"[36]. Hier finden wir also den Begriff der Ordinalzahl scharf gegen der Kardinalzahl abgehoben.

Vom Zählen aus gesehen erscheint übrigens der Ordinalzahlbegriff als der Primäre; wir zählen ja zunächst: erstens, zweitens, … siebentens, und erst ein Abstraktionsprozess führt dazu zu sagen: dieser Bereich enthält sieben Dinge.

Fragen wir nun, welchen Hegelschen Termini unsere Begriffe entsprechen, so gestattet diese Frage keine eindeutige Antwort. Es ist nämlich der Unterschied zwischen Ordinalzahl und Kardinalzahl für HEGEL nur ein Unterschied im Begriff, der zu einem Unterschied der Eigenschaften erst wird, wenn man den Kreis der von HEGEL allein betrachteten (und auch allein ihm zugänglichen) so genannten endlichen Mengen verlässt. So kommt es, dass HEGEL auf diese Unterscheidung wenig Wert legt und sie sich verwischt. Immerhin lässt sich soviel sagen: Die Zählzahl als Zahl einer Menge entspricht etwa der diskreten Größe: "Ebenso ist die diskrete Größe unmittelbar nur unterschiedenes Vieles überhaupt, das, insofern es als solches eine Grenze haben sollte, nur eine Menge ... wäre"[37]. Dem Zählzahlmoment Kardinalzahl entspricht, wie eine schon zitierte Stelle lehrt[38] gelegentlich sogar der Begriff der Quantität, gelegentlich auch Quantum und Anzahl, während sich die Ordinalzahl manchmal mit der Einheit, manchmal mit dem Grad als diskreter Größe in Parallele setzen lässt. "Im Grade ist der Begriff des Quantums *gesetzt.* Er ist die Größe als gleichgültig *für sich* und einfach, so dass sie aber die Bestimmtheit, wodurch sie Quantum ist, schlechthin außer ihr in anderen Größen hat"[39]. Hierbei muss man bedenken, dass die Ordinalzahl weniger durch die von ihr gezählten Mengen als vielmehr durch ihre Stellung in der Reihe der Ordinalzahlen völlig charakterisiert ist, eine Eigenschaft, die der Kardinalzahl in diesem Umfange nicht zukommt. (Allerdings denkt HEGEL beim Grade wesentlich auch an das Kontinuierliche, das wir hier aber gerade ausschließen müssen: "Diese Beziehung des Grades durch sich selbst auf sein Anderes macht das Auf- und Absteigen an der Skale der Grade zu einem stetigen Fortgang, einem Fliessen, das eine ununterbrochene, unteilbare Veränderung ist."[40])

Die Hegelsche Beschränkung auf die so genannten endlichen Mengen wird, so nahe liegend sie ist, durch sein System nicht erzwungen, aber das Niederreißen dieser Schranke ist erst viel später gelungen und hat dann zu einer ungeahnten Erweiterung des mathematischen Horizontes geführt. (Es ist allerdings kaum anzunehmen, dass HEGEL irgendwie die innere Möglichkeit gehabt hat, diese Schranke zu überschreiten).

Betrachten wir doch einmal den ordinalen Zählprozess! Wir zählen: erstens, zweitens, drittens … Anstatt uns nun aber der "Langeweile des Progress ins Unendliche" hinzugeben, reflektieren wir über den ganzen Prozess[41] und – zählen weiter: ω-tens, ω+1-tens,

---

[36] Log. I., S. S. 198.
[37] Log. I, S. 213.
[38] Log. I., S. 336. Hier S. 114 unten.
[39] Enz., S. 123.
[40] Log. I., S. 215.
[41] Der formale Ausdruck hierfür ist die (HEGEL vermutlich unbekannte) vollständige Induktion, die die "Langeweile" aufhebt. Vergl. S. 10.

… Damit ist aber eine Verendlichung des so genannten Unendlichen erfolgt, insofern man als charakteristische Eigenschaft des Unendlichen seine Unerreichbarkeit und Unüberbietbarkeit ansehen wollte. Diese "Endlichkeit" der Reihe der natürlichen Zahlen hat schon HEGEL gesehen wenn er etwa sagt: "Es ist ein abstraktes Hinausgehen vorhanden, das unvollständig bleibt, indem über dies Hinausgehen nicht selbst hinausgegangen wird"[42]. Nun, dies Hinausgehen über jedes Hinausgehen hat die moderne Mathematik, wie oben gezeigt, vollzogen. "Die Unendlichkeit des unendlichen Progresses bleibt mit dem Endlichen als solchem behaftet, ist dadurch begrenzt und selbst *endlich*"[43].

Am deutlichsten wird diese "Endlichkeit" der Reihe der natürlichen Zahlen, wenn man an ihre e n d 1 i c h e Darstellung durch die Peanoschen Axiome denkt:

Eine Menge von Elementen, zwischen denen eine zweigliedrige Relation (die des Vorgänger-Nachfolger-Seins) besteht, stellt die Reihe der natürlichen Zahlen dar, wenn es

1. eine Zahl ohne Vorgänger gibt: die Eins, wenn
2. jedes von Eins verschiedene Element genau einen Vorgänger hat,
3. jedes Element genau einen Nachfolger hat, und wenn
4. jede die Eins enthaltende Teilmenge, die mit irgendeinem Element stets auch dessen Nachfolger enthält, die ganze Menge ist (Induktionsprinzip).

Was hier über die "Endlichkeit" der ersten so genannten unendlichen Ordinalzahl gezeigt wurde, trifft ebenso jede andere Ordinalzahl: "Ein solches Unendliches, welches nur ein Besonderes ist, *neben* dem Endlichen ist, an diesem eben damit seine Schranke, Grenze hat, ist *nicht* das, was es sein soll, nicht das Unendliche, sondern ist nur endlich."[44] "Denn in jenem Ausdruck erscheint das Endliche als belassen; es wird nicht ausdrücklich als *aufgehoben* ausgedrückt."[45]

Ein echtes Unendlich liefert uns erst die Reihe aller Ordinalzahlen [46]. Hierzu braucht nur eingesehen zu werden, dass über sie, nicht mehr reflektiert werden kann, dass durch "Setzen" in ihr zwar beliebig weit, aber nicht zu Ende gekommen werden kann, denn: "Das Unendliche aber ist, wie seine beiden Momente vielmehr wesentlich nur als Werden."[47] "Die Unendlichkeit oder diese absolute Unruhe des reinen Sichselbstbewegens, dass, was auf irgend eine Weise, z.B. als Sein, bestimmt ist, vielmehr das Gegenteil dieser Bestimmtheit ist, ist …"[48]. Und schließlich: "Das *Wesen* ist die Unendlichkeit als das Aufgehobensein aller Unterschiede, die reine achsendrehende Bewegung, die Ruhe ihrer selbst als absolut unruhiger Unendlichkeit

---

[42] Log. I., S. 131.
[43] Log. I., S. 131.
[44] Enz., S. 116.
[45] Enz. S. 117.
[46] Vergl. hierzu O. BECKER: *Mathematische Existenz*, Jahrb. für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd. 8 (1927), bes. § 5 a) u. S. 659.
[47] Log. I., S. 138.
[48] Phän., S. 110.

…"[49]. Dass nun dieser Sachverhalt echter Unendlichkeit vorliegt, beweist die so genannte Antinomie von Burali-Forti: Angenommen, die Reihe der Ordinalzahlen läge vollendet vor, so könnte über sie reflektiert werden, sie wäre also doch nicht vollendet, da jede derartige Reflektion eine Fortsetzung des Zählprozesses nach sich zieht.

In dieser, sich im Werden vollendenden, unvollendbar-vollendeten, endlich unerfassbaren Unendlichkeit der Reihe der Ordinalzahlen, die nur potentiell sein kann und doch aktuell ist, hat das Quantum sein Jenseits gefunden, nicht aber schon in der Reihe der natürlichen Zahlen, die sehr wohl ein Quantum hat.

Trotzdem sind diese endlichen Ordinalzahlen vor den so genannten unendlichen in bestimmter Weise ausgezeichnet: während man nämlich eine endliche. Menge auf eine und nur auf eine Weise zählen kann, geht dies sonst auf viele Weisen, z.B.

$1,2,3, \ldots, n, n+1,\ldots$ gezählt durch ω

$2, 3, \ldots, n, n+1,\ldots, 1$ gezählt durch $\omega+1 \neq \omega$

Dieser "Mangel" haftet den Kardinalzahlen nun nicht mehr an; jede Menge wird durch eine einzige Kardinalzahl gezählt; aber eine Bestimmung der Größe einer Kardinalzahl ist nur durch Ordinalzahlen möglich, die sich hier wieder als das Primäre erweisen.

Besonders deutlich wird die Vermengung der beiden Momente des Begriffs der Zählzahl durch HEGEL bei der Einführung des Rechnens mit ihnen. Während es noch ziemlich klar ist, dass HEGEL bei der Einführung der Addition kardinal dachte, lässt sich dies bei Einführung der Multiplikation nicht mehr eindeutig entscheiden. (Es hat dies wieder seinen Grund darin, dass HEGEL an die so genannten unendlichen Zahlen nicht dachte, nicht denken konnte, bei denen sich überhaupt erst Unterschiede aufweisen lassen.)

Der Übersicht halber seien die verschiedenen Definitionen. einander gegenübergestellt

	Kardinalzahl	Ordinalzahl
Addition	Kardinalzahl der Vereinigung elementfremder Mengen = Summe der Kardinalzahlen	$\nu+1$ = Nachfolger von ν $\nu+(\mu+1)$ = Nachfolger von $\nu+\mu$ $\nu+\lim \mu = \lim (\nu+\mu)$
Multiplikation	Produkt zweier Kardinalzahlen = Kardinalzahl der Menge aller Paare	$\nu\cdot 1 = \nu$ $\nu\cdot(\mu+1) = \nu\cdot\mu+\nu$ $\nu\cdot\lim \mu = \lim (\nu\cdot\mu)$

Die Unterschiedenheit dieser beiden Operationen, je nachdem man sie kardinal oder ordinal aufzieht, wird am Kommutativgesetz klar, das die Kardinaloperationen erfüllen, aber nicht die ordinalen. Z.B.:

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$
$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq 2 \cdot \omega$$

Dass HEGEL wenigstens bei der Addition kardinal dachte, zeigt: "Die durch das Nummerieren entstandenen Zahlen werden wieder nummeriert; und indem sie so unmittelbar

[49] Phän., S. 118.

gesetzt sind, sind sie noch ohne alle Beziehung aufeinander, bestimmt, gleichgültig gegen Gleichheit und Ungleichheit, von zufälliger Größe gegen einander – daher ungleiche überhaupt – Addieren"[50]. Also Addieren ist Zusammenfügen der (ungeordneten) Mengen: Kardinaladdition. Dass HEGEL die Multiplikation rekursiv auf Addition definierte, zeige: "Die Multiplikation ist die Aufgabe, eine Anzahl von Einheiten, die selbst eine Anzahl sind, zusammenzuzählen"[51]. Dies klingt recht ordinal lässt aber auch eine kardinale Interpretation zu.

So ist die Zählzahl zur Rechenzahl geworden oder als solche erwiesen.

Heute liegt es näher, dies zweite Moment independent zu entwickeln, wie etwa in der Körpertheorie geschehen.

Ursprung der Rechenzahl ist das *Messen* oder noch schärfer das *Vergleichen*. Alles Messen ist ja weiter nichts als Vergleichen mit einer Einheit, d.h. zunächst Angabe, wann zwei der zu messenden Gebilde das gleiche "Maß" haben. "Diese auf Gleichheit oder Ungleichheit beruhenden Bestimmungen sind echt geometrisch,"[52] sogar echt mathematisch. Um solch Vergleichen durchführen zu können, ist es nötig, dass die fraglichen Grössen addierbar, dividierbar und multiplizierbar sind d.h. dass sie insbesondere im direkten und indirekten Verhältnis stehen.

"Im Verhältnis ist es" (das Quantum) "nun so *gesetzt,* in seiner Äußerlichkeit an einem andern Quantum, seine Bestimmtheit zu haben, in seinem jenseits das zu sein, was es ist."[53] Hierin findet das fundamentale Charakteristikum der so genannten Gruppen seinen abstrakten Ausdruck: in den Gleichungen

$a + b = c$		$a \cdot b = c$	$(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$
	bei		
Additions-		Multiplikations-	

Gruppen ist jede der drei Größen a, b, c durch die beiden anderen eindeutig bestimmt. Bringt man Addition und Multiplikation, diese beiden abstrakten Relationen, zur Deckung, so entsteht ein System von Zahlen, mit denen man unbeschränkt rechnen, also auch messen kann, ein so genannter Körper.

Hier mündet der entwickelte Begriff der Rechenzahl in den entwickelten Begriff der Zählzahl ein. Soll allerdings mit den Zählzahlen, so gerechnet werden wie mit Rechenzahlen, unbeschränkt, so muss man sich auf die so genannten endlichen beschränken; in ihrem vollen Umfang entwickelt, lassen sich Zählzahl und Rechenzahl nicht zur Deckung bringen, sind einseitige, sich widersprechende Momente des Zahlbegriffs. Beschränkt man sich jetzt auf die so genannten endlichen Zählzahlen, so lassen sie sich durch einfache Operationen in einen Körper einbetten. Hierbei gehen wir aber von der diskreten zur kontinuierlichen Größe über und erhalten als volle Entwicklung des Begriffs der Zahl, als Einheit von Zähl- und Rechenzahl, den Begriff

[50] Log. I., S. 201.
[51] Log. I., S. 205.
[52] Log. I., S. 199.
[53] Log. I., S. 323.

der reellen Zahl. Im Körper der reellen Zahlen bilden dann die ganzzahligen Vielfachen einer reellen Zahl im wesentlichen ein System von Zählzahlen. Hierin haben wir das Moment der diskreten Größe wieder gefunden: "Die diskrete Größe ist also das Außereinander des vielen Eins, *als des Gleichen*, nicht das viele Eins überhaupt", (das wäre das System der Zählzahlen) "sondern als das Viele einer Einheit gesetzt"[54]. Hierin haben wir auch deutlich den Übergang von diskreter zu kontinuierlicher Größe durch stetigen Wechsel der Einheit: "Die Kontinuität ist nur die zusammenhängende, gediegene Einheit als Einheit des Diskreten; so *gesetzt ist sie* nicht mehr nur Moment, sondern ganze Quantität, *kontinuierliche Größe*"[55].

In der reellen Zahl findet so die Entwicklung der Arithmetik ihre Vollendung; die beiden, zunächst einseitigen und widersprechenden Momente des Zahlbegriffs: Zähl- und Rechenzahl haben zusammengefunden: "Das Quantum hat seine Entwicklung und vollkommene Bestimmtheit in der Zahl, die als ihr Element das Eins – nach dem Momente der Diskretion die *Anzahl"* (=Zählzahl), "nach dem der Kontinuität die *Einheit"* (=Rechenzahl), – als seine qualitativen Momente in sich enthält"[56].

The text was originally edited and rendered into PDF file for the e-journal <www.vordenker.de> by *E. von Goldammer*

vordenker
ISSN 1619-9324

How to cite:
Reinhold Baer: Hegel und die Mathematik, in: www.vordenker.de (Edition: Dezember 2001), J. Paul (Ed.), URL: < http://www.vordenker.de/ggphilosophy/baer_hegel_math.pdf > — Erstveröffentlichung in: Verhandlungen des zweiten Hegelkongresses vom 18.-21. Okt.1931 in Berlin, (B.Wigersma, Hrsg.) J.C.B. Mohr, Tübingen, 1932, p.104 f.

[54] Log. I., S. 194.
[55] Log. I., S. 193-194.
[56] Eng., S. 121.