

Paul Hofmann [*]

Das Problem des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten

EINLEITUNG

Die Gedanken des folgenden Aufsatzes sind ein Nebenergebnis langjähriger philosophisch-systematischer Arbeit, von der ich bisher nur wenig veröffentlicht habe.^[1] Einige Hauptgedanken seien einleitend skizziert.

Objekt und Subjekt können nicht "Gegenstände" sein, die wie andere Gegenstände jeder "für sich" "sind" und sich durch vergleichbare "Eigenschaften" unterscheiden. Denn einerseits soll ja "Subjekt" das Gegenteil von "Gegenstand" bedeuten, andererseits hätte ohne ein angebbares Gegenteil auch der Begriff "Objekt" (Gegenstand) keinen Sinn. Im Durchdenken dieser Gedanken kommt man zu folgenden Feststellungen.

Erstens: die Prädikate "objektiv" und "subjektiv" sind nicht "Eigenschaften" von "etwas". Sie bedeuten vielmehr Sinngebungen, unter denen etwas erlebt, erlebend bestimmt wird; und zwar so, daß sie nur eine relative Anwendung gestatten. Ich bestimme etwas als subjektiv oder objektiv nur im Gegenverhältnis zu anderem, das ich im Vergleich mit ihm im gegenteiligen Sinne fasse. Damit werden dem so bestimmten Etwas nicht eigenschaftliche Bestimmungen zugeschrieben, die ihm ein für alle Male zugehören, sondern das so Bestimmte wird jeweilig nur in eine Reihe vergleichenden Bestimmens eingereiht, in der zwei Richtungen zu unterscheiden sind: die Richtung auf das nie erreichbare rein Objektive: den "Gegenstand an sich" und die auf das ebenso unerreichbare reine Subjektive: das reine Erleben. Beide unerreichbaren Zielpunkte bedeuten "Grenzbegriffe", die selbst nicht als Bestimmungen verwendet werden können.

Zweitens: Objekt und Subjekt sind nicht voneinander getrennte Gegenstände, die in der Welt nebeneinander für sich wären. Vielmehr ist alles Erlebbare beides: objektiv und subjektiv, Gegenstand und Bewußtseinsinhalt, "Er-äugnis" und "Er-leben". Jedes Mögliche überhaupt ist Erlebensereignis. Es wird als etwas erlebt, als ein Gegebenes oder Gehabtes; und dieses Gegebene wird "erlebt", d.h. ich "spüre" in dem Erlebensereignis zugleich ein "Lebendiges", ein Leben, das zu dem ersteren gleichsam "Ich" oder "mein" Erlebnis sagt.

Jedes Erlebensereignis stellt mir nun zugleich eine doppelte Aufgabe des Erkennens oder Forschens. Ich strebe einerseits, das "Objektive", das ich in ihm habe, in seiner Objektivität herauszuarbeiten, es zu "entsubjektivieren", indem ich in meinem Denken die (subjektiven) Trübungen von ihm abstreife, die es durch sein Erlebtwerden erfährt. In genau entgegengesetzter Richtung arbeitet das "selbstbesinnliche" philosophische Bestreben, das Erleben oder den "Sinn" in seiner reinen Sinnhaftigkeit zu erforschen: den im Erlebnis gespürten Sinn zu "entobjektivieren", ihn zu reinigen von der Trübung, die seine Verwirklichung als psychisches Ereignis und seine Anwendung auf Objektives mitbringt.

* aus: Pan-Bücherei, Gruppe: Philosophie, Nr.9, Berlin (Pan-Verlag) 1931, Seite 1-45.

1 Eine ausführliche Darstellung der Grundlage meines Systems gedenke ich demnächst zu veröffentlichen.

So zeichnen sich zwei einander entgegengesetzt gerichtete Grundrichtungen des Forschens voneinander ab, die in allen Teilfunktionen sich gleichsam wie Spiegelbilder verhalten: sacherforschende Wissenschaft und sinnerforschende Selbstbesinnung: Philosophie. Die urphänomenale unlösbare Verflechtung von Erleben und Gegenstand, Sinn und Sein, bringt es aber mit sich, daß zwischen diese beiden grundsätzlich zu unterscheidenden Gebiete sich sozusagen von beiden Seiten her und darum in verschiedener Weise je ein Mittelgebiet schiebt: nämlich einerseits Psychologie und Geisteswissenschaften, die dabei grundsätzlich im Bereich der Sachwissenschaften – gleichsam an der Randzone derselben – sich ansiedeln; und die Mathematik im Bereich der Sinnerforschung. Die Psychologie erforscht das Spezialgebiet der "uneigentlichen" Gegenstände: der gegenständlich gefaßten spezifischen Ereignisse des Erlebens, die als solche nicht durch ihre Eigenschaften, sondern durch die in ihnen lebenden Sinngebungen als durch die sie in ihrem Sosein und ihrem gesetzlichen Sichverhalten charakterisierenden Momente bestimmt gedacht werden. Die Mathematik dagegen erforscht wie die Philosophie "Sinn". Nun aber auch sie "uneigentlichen" Sinn, nämlich nicht die Struktur des Erlebens-überhaupt, deren Sinn in jedem möglichen Erlebnis die urphänomenale Grundlage des in ihm lebenden "Ich"- und "Es-sagens" bildet. Sie erforscht vielmehr den sinnhaften Gehalt besonderer Erlebnisse, und zwar den, der angewandt werden kann zur Bestimmung der Beschaffenheiten von Gegenständen. (Dabei richtet sich die Mathematik möglichst auf die "formalsten" Momente, die grundlegenden, allgemeinsten Züge der Funktionen dieses Bestimmens.[²])

Wenn z.B. die Logik als ein Teilgebiet der "eigentlichen" Sinnerforschung sich beschäftigt mit dem Sinne "Gegenständlichkeit" überhaupt, dessen Struktur in der urphänomenalen Struktur des Sinnes Erleben überhaupt impliziert und vorgebildet ist, so betrachtet die Mathematik die Gestaltungen der besonderen Erlebnisse, in denen nun nicht mehr das Gegenständlichsein der Gegenstände überhaupt zum Erleben kommt, sondern die besondere Art ihres Gegenstandseins bestimmt wird. Sie betrachtet aber diese Erlebnisse nicht als "Ereignisse": in ihrem Seins-Zusammenhang mit der gegenständlichen "Welt" (wie Psychologie und Geisteswissenschaft); also nicht als (uneigentliche) Gegenstände, sondern untersucht den sinnhaften Gehalt, der in ihnen auf Gegenstände Anwendung findet oder doch grundsätzlich finden könnte. – In diesem Sinne ist sie eine Wissenschaft, die zwar dem Sinnhaften, aber nur dem "ureigentlich" Sinnhaften gilt: nicht dem Sinne "der Gegenständlichkeit", sondern dem "auf" Gegenstände angewandten oder anwendbaren.

² Die Urfunktion des Bestimmens kommt, wie hier nicht ausgeführt werden kann, in der "Zahl" zu Anwendung und Ausdruck. Weshalb Plato mit tiefer Ahnung seine "Ideen", zu denen er das Sinnhafte objektiviert, als Zahlen bezeichnet.

Die folgenden Bemerkungen wollen zu jener Problematik des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten Stellung nehmen, die von dem Begründer der intuitionistischen Mengenlehre L.E.J. Brouwer aufgeworfen worden ist und mit der die logischen Grundlagen der Mathematik zum Teil überhaupt in Frage gestellt zu sein scheinen.

Nach Brouwer ist der logische Grundsatz des ausgeschlossenen Dritten nichts anderes als ein in langer Tradition festgehaltener Denkfehler. Das zeigt sich daran, daß dieser Grundsatz – wieder nach Brouwers Meinung – unanwendbar wird, sobald er auf unendliche Bereiche bezogen werden soll. So ist z.B. der Satz "In der Reihe der natürlichen Zahlen gibt es oder gibt es nicht eine Zahl mit der Eigenschaft E " unstatthaft, solange nicht, entweder eine Zahl mit der Eigenschaft E aufgewiesen werden kann, oder aus dem Gesetz der Konstruktion der Zahlenreihe bewiesen wird, entweder daß eine Zahl mit der Eigenschaft E vorkommen muß oder daß sie unmöglich ist. Neben diesen beiden dem Aufweis oder Beweis zugänglichen Fällen soll es nämlich stets noch die dritte Möglichkeit geben, daß die Eigenschaft zwar durch das Gesetz der Konstruktion nicht gefordert oder ausgeschlossen sei, aber in dem jeder aufweisbaren Erfahrung gegenüber verbleibenden Rest des unendlichen Inbegriffes (gleichsam empirisch-zufällig, wie ich sagen würde) vorkomme.

Um uns über die Bedeutung dieser These Brouwers für die logisch-mathematische Problemlage klar zu werden und ihre Berechtigung oder Nichtberechtigung zu erkennen, ist es notwendig, sehr weit auszuholen, um zunächst das Wesen der mathematischen Wissenschaft und ihrer Gegenstände, den Sinn der Gegenständlichkeit jener Gegenstände, noch tiefer greifend aber den Sinn des Bestimmens von Gegenständen überhaupt einer Untersuchung zu unterziehen. Sodann aber, und in engem Zusammenhang damit wird es notwendig, den Sinn des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten selbst – die spezifische Weise nämlich, in der Gegenstände durch seine Anwendung bestimmt werden – zu untersuchen.

1. Der Sinn der Mathematik und das "transzendente Prinzip"

Mathematik nimmt als Wissenschaft eine eigentümliche Zwischenstellung ein zwischen den Sachwissenschaften oder, was dasselbe ist, Einzelwissenschaften und der Philosophie als der Wissenschaft von Sinn. Sie beschäftigt sich nämlich zwar nicht mit "Gegenständen", wie die Sachwissenschaften es tun, aber auch nicht mit dem Nichtgegenständlichen: dem Sinn als solchem,³ sie untersucht vielmehr die sinnhaften Bestimmungen möglicher Gegenstände. Das heißt: die Mathematik betrachtet grundsätzlich gar nicht diejenigen Gegenstände, auf welche ihre Bestimmungsmethoden angewandt werden können; sie konstruiert vielmehr aus Sinnmomenten. erlebensmöglichen Bestimmens Methoden oder Begriffe, durch die mögliche, d.i. denkbare Gegenstände überhaupt bestimmt werden können. Die Figuren der Geometrie, die Zahl, der Mengenbegriff, die Funktionsbegriffe der Analysis – diese sogenannten "Gegenstände" der Mathematik – bedeuten nichts anderes als eben solche aus Sinnmomenten konstruierte Begriffe, durch die mögliche Gegenstände (einer denkbaren Welt) bestimmt werden können. Genauer: sie sind symbolische Darstellungen, Festlegungen dieser Begriffe. Die Frage nach der (faktischen) Existenz dieser durch jene Sinnmomente

³ Über das spezifisch Subjektive, Ichhafte, also Nichtgegenständliche von Sinn finden sich nähere Erörterungen in meiner Schrift: "Das Verstehen von Sinn und seine Allgemeingültigkeit", Berlin (Pan-Verlag) 1929.

bestimmbaren Gegenstände bleibt für die Mathematik gleichgültig, der allgemeine Gedanke dagegen, daß die jenen Begriffen entsprechenden Gegenstände möglich (erlebensmöglich) sind, d.i. daß sie "als" Gegenstände müssen gedacht werden können, kann aus der Mathematik nicht ausgeschlossen werden, er gehört notwendig zu ihrem Sinne.

So hat Kant tief gesehen, als er die Mathematik die Wissenschaft von der Konstruktion der Begriffe nannte. Denn unter "Begriffen" verstehen wir Denkereignisse, in denen ein (wissend bestimmender) Sinn "lebt"; durch solchen Sinn sind Gegenstände erlebend bestimmbar; seine eigene Sinnhaftigkeit wird dagegen gerade dadurch definiert, daß er, als Sinn – als bestimmend anwendbare Modifikation des ichsagenden Erlebens überhaupt^[4] – verstanden, in keiner Vergegenständlichung "ohne Rest" erfaßbar wird. Dieser Sinn (von Begriffen) nun, der auf mögliche Gegenstände bestimmend beziehbar ist, wird in der Tat "konstruiert": er wird aus Sinnmomenten in selbst sinnhaften Verbindungsverfahren ("synthetisch") aufgebaut. Oder man kann doch sagen: die seelischen Ereignisse (des Bestimmens möglicher Gegenstände) und die Symbole, in denen uns der (seinem Sosein nach selbst unfaßbare) Sinn (irgendeines ich-haften Bestimmens, und – noch tiefer, gesehen – der des Erlebens überhaupt) "ausdrücklich" wird, werden konstruiert.

Die Mathematik konstruiert nun diese Begriffe a priori, d.h. unabhängig von dem etwaigen Gegebensein entsprechender Gegenstände – und sie konstruiert die Darstellungen, mit denen sie faktisch arbeitet, natürlich unter den anthropologischen "Bedingungen der Anschauung", sei es der äußeren Wahrnehmung (Raum), sei es nur der (sogenannten "inneren") Wahrnehmung eigener Seelenereignisse (Zeit). Kant irrte aber darin, daß er gerade den anschaulichen Charakter dieser den Sinn lediglich zur (anschaulichen) Darstellung bringenden Konstruktionen und sogar die anthropologisch-zufälligeren Eigentümlichkeiten unseres menschlichen Anschauens möglicher Gegenstände, Momente also, welche selbst (in der Eigenart ihres Soseins) aus dem reinen Sinn des Erlebens überhaupt,^[5] dem der Gegenständlichkeit oder aus dem des Bestimmens möglicher Gegenstände nicht ableitbar sind (über die sich deshalb auch die nichteuklidische Geometrie und die mathematischen Begriffe der Relativitätstheorie mit Recht hinwegsetzen) – Kant irrte darin, daß er diese Anschaulichkeit für die Mathematik als wesentlich ansah. Der anschauliche Charakter der konstruierenden Erlebnisse als der Sinn-anwendenden und zugleich Sinn-ausdrückenden Symbole gehört in der Tat nur zu dem Gegenständlichen, das wir in dieser Konstruktion setzen, nämlich eben zu den seelischen Ereignissen, in denen der Sinn lebt, und damit zu den Symbolen (Sinn-Bildern), mit Hilfe deren die seelischen Ereignisse fixiert und übertragbar gemacht werden.

Eine Fixierung durch anschauliche Symbole überhaupt ist allerdings keineswegs entbehrlich. Denn durch sie werden jene ihrem eigentlichen Sinne nach nichtgegenständlichen Sinnkonstruktionen erst geeignet, "Gegenstände" der mathematischen Forschung zu sein: derart, daß an ihnen die mathematischen Operationen eindeutig vorgenommen werden können. Denn das Verfahren der Mathematik beruht gerade darauf, daß der im Erleben lebendige Sinn, obwohl er im Verhältnis zu dem (möglichen) Gegenstand, den

⁴ Siehe hierzu "Das Verstehen ..." § 3ff.

⁵ Jeder besondere Sinn, der in irgendeinem Bestimmen möglicher Gegenstände zur Anwendung gebracht wird, ist letztlich eine Modifikation des Sinnes Erleben-überhaupt, dessen allgemeinere Struktur sein besonderes Sosein möglich macht.

er bestimmt, nicht-gegenständlich ist, doch selbst wieder "vergegenständlicht" werden kann; das aber geschieht dadurch, daß die Erlebnisse, in denen er lebt und angewandt wird, zu Gegenständen einer "inneren" Betrachtung gemacht werden.

In dieser Betrachtung werden die Gedanken, in denen wir Gegenstände bestimmen, indem wir ihre Eigenschaften gleichsam nennen, ihrerseits "seelische Ereignisse" für uns, d.h. gegenständlich. Der reine Sinn jenes Bestimmens gehört zwar nicht im eigentlichen Sinne, gehört nicht als "Eigenschaft" zu diesen Ereignissen, sondern wird ihnen nur "eingelegt" von dem (seinerseits relativ nicht-gegenständlichen) Erleben^[6] her, für den diese seelischen Ereignisse Gegenstände ("innerer Wahrnehmung") sind und das sie (in dieser inneren Wahrnehmung) als Gegenstände bestimmt; aber jedesmal, wenn wir diese Ereignisse, uns vor Augen stellen, lebt "derselbe" Sinn des Bestimmens wieder so in uns auf, wie er dieses seelische Ereignis einmal "beseelte", und, wenn wir das so beseelbare oder beseelte Erlebnis assoziativ an Symbole ketten,^[7] so erweisen uns diese den gleichen Dienst. Der Rückgang vom Gegenstand auf das Erlebnis des Bestimmens und die Kettung der letzteren an Symbole macht darum den an sich selbst unfaßbaren Sinn festhaltbar und wiederholbar.

Wenn wir z.B. die Drei-Eigenschaft einer gegenständlichen Menge in dem seelischen Ereignis des Dreizählens, also in drei Akten des (+ 1) Sagens bestimmen, so binden wir dieses Ereignis und damit mittelbar seinen Sinn an das Zahlsymbol.^[8] Solche Symbole sind also "Sinn-Bilder": Bilder eines sinnhaft bestimmenden Erlebens von möglichen Gegenständen oder gegenständlichen Beschaffenheiten (welches Erleben seinerseits nicht als Gegenstand innerer Wahrnehmung aktuell "da zu sein", sondern nur als erlebensmöglich "gespürt" zu sein braucht): So sind die Zahlen Symbole des Erlebens von allen denjenigen Beschaffenheiten, welche (in irgendeinem Sinne) "meßbar" sind. Die Zahlen sind jedoch wohlverstanden selbst keine Gegenstände, jedenfalls nicht in demselben Sinne wie jene durch die Zahlen zu bestimmenden (möglichen) Gegenstände; denn in dem möglichen Bestimmen von Gegenständen funktionieren sie nicht als Gegenstände, sondern als Ausdrucksmittel des bestimmenden Erlebens: sie stehen auf der "subjektiven", auf der Sinn-Seite dieser Bestimmenserlebnisse.

Die Sinnverhältnisse liegen hier jedoch nicht immer ganz so einfach. Nicht immer entspricht das Symbol, in dem der Sinn des Erlebens ausgedrückt werden soll, der Ausdruck also, dem auszudrückenden Sinne auf eine adäquate Weise. So verhält es sich z.B. im Falle eines Dezimalbruches wie des nach $\sqrt{2}$ zu entwickelnden. Das gegenständlich aufweisbare Symbol drückt hier niemals denjenigen Sinn adäquat aus, der in ihm eigentlich zur Darstellung gebracht werden soll. Dieser Sinn würde nämlich seinen vollständigen Ausdruck nur in einem vollendeten unendlichen Dezimalbrüche finden;

⁶ D.h. dem im Verhältnis zu jenen "erlebten" Bestimmens-Ereignissen relativ "erlebenden" Erleben. Vgl. meine Schrift: *Metaphysik oder verstehende Sinnwissenschaft?* (Ergänzungsheft 64 der Kant-Studien, Berlin (Pan-Verlag) 1929 S. 18 und 44 f.)

⁷ Als nächstliegende Symbole bieten sich uns dabei die Vorstellungen eben der Gegenstände dar, die in den betreffenden Erlebnissen bestimmt werden. (Über die Notwendigkeit spezifisch seelische Gegenstände durch Bezugnahme auf das in ihnen erlebte "äußerlich" Gegenständliche zu beschreiben, vgl. meine Arbeit: *Das religiöse Erlebnis* (Philos. Vorträge der Kant-Ges. Nr. 28, Berlin (Pan-Verlag) 1925, S. 32 Anm. 21 und das dort herangezogene Zitat nach Dilthey.)

⁸ Dem in der vorangehenden Fußnote Gesagten entspricht es dabei, daß als "Symbol" des die Drei-Eigenschaft bestimmenden Sinn-Erlebnisses drei Punkte, Striche oder dergleichen gewählt zu werden pflegen.

solche unendlichen Konstruktionen können aber symbolisch nicht durch ein Zeichen adäquat ausgedrückt werden, sondern erst durch das endlose Immer-wieder-Hinschreiben neuer Ziffern, durch eine Symbolisierung also, die nur als Ergebnis einer "endlos werdenden" Darstellung des Sinnes $\sqrt{2}$ denkbar sein würde.

Dieses "endlose Werden" der Darstellung ist natürlich noch viel weniger ein Gegenstand, als die anschaulich darstellbaren Zahlen (die Ziffern-Symbole) selber es sind. Sein Gedanke ist nur ein Ausdruck für ein selbst wieder sinnhaftes Gesetz, nach welchem zahllose "Gegenstände" (möglicher Anschauung) hergestellt werden können: die immer länger werdenden Brüche. Und dieses Gesetz gehört selbst als Teilmoment oder als Mittel ausdrücklich machender Darstellung zu dem Sinngesetz des Bestimmens möglicher Gegenstände, dem die eigentliche mathematische Betrachtung gilt.

Weder sind nun jene sich in der Zeit ereignenden Akte faktischen Zählens noch die Symbole, in denen sie fixiert werden, das, was die Mathematik erforscht. Ihr geht es um den Sinn des zählenden Konstruierens (zu dem außer dem Sinn des [+1]-Aktes auch der des Zusammenfassens der Einheiten und die Beziehung der ganzen Konstruktion auf durch sie bestimmte [mögliche] Gegenstände überhaupt gehört). Dieser Sinn aber ist dem besonderen Zählensereignis, wie schon gesagt wurde, nur "eingelegt" und ebenso natürlich dem Symbol, das dem letzteren assoziiert wird.

Das sinnhafte Gesetz der Zahlenreihe steht so in zweifacher Weise mit Gegenständen in Beziehung. Erstens mit den möglichen Seelenereignissen des Denkens wirklicher Menschen, in denen sowohl das Gesetz wie die nach ihm konstruierbaren Zahlen aktuell gedacht werden, andererseits, und zwar auf eine besondere, für die Mathematik spezifische Weise, wie wir gleich näher ausführen werde, mit den wiederum als erlebensmöglich gedachten Gegenständen, deren gegenständliches Beschaffenheit durch den in jenen Seelenereignissen lebenden Sinn bestimmbar gedacht ist.

Dieser Sinn ist nun wie jeder Sinn (eines Begriffes) "allgemein", weil er – wie hier nicht ausgeführt werden kann⁹ – in allen möglichen Anwendungen identisch derselbe ist. Ein Sinn bestimmt deshalb auch mögliche Gegenstände "im allgemeinen". Das will sagen: Alle die bestimmenden Prädikate, welche aus dem Sinne dem Gegenstand zugeordnet werden, gelten, insoweit sie in der Konstitution des Sinnes begründet und aus ihr (d.i. aus ihrer adäquaten Darstellung) gegebenenfalls analytisch erkennbar sind, – für alle (d.h. für jeden einzelnen der) möglichen Gegenstände, die überhaupt durch diesen Sinn bestimmbar sind. Ob es, wie erwähnt, solche Gegenstände in der empirisch-erforschbaren Welt "gibt", ja ob es sie nach selbst empirischen Naturgesetzen auch nur geben kann, das geht grundsätzlich die Mathematik nichts an, da diese nicht die Beschaffenheiten der Gegenstände selbst, sondern den Sinn der Erlebnisse, durch die sie bestimmbar sind: die "allgemeinen Begriffe" von Gegenständen konstruiert. Wohl aber ist es eine mathematisch relevante Frage, ob der Sinn einer Konstruktionsweise des Bestimmens dem allgemeinen Sinn der "Gegenständlichkeit" entspricht oder nicht. Denn da die mathematischen Bestimmungen Bestimmungen möglicher Gegenstände sind, ist ihr Bestimmen an diesen Sinn der Gegenständlichkeit a priori gebunden, und sie selbst dürfen gegen diese zu ihrem eigenen Sinn gehörige Bedingung

⁹ Vgl. Das Verstehen von Sinn, S. 35 ff. und Anhang III.

nicht verstoßen – ein Moment, zu dem wir im folgenden eingehend Stellung nehmen werden.

Dieser selbst a priori gewisse Sinnverhalt nun, daß alles, was im Sinn und dann in der (bestimmenden oder darstellenden) Konstruktion des Sinnes liegt, auch für die durch diesen bestimmten (bestimmbaren) möglichen Gegenstände gilt – zuletzt deshalb, weil jeder mögliche Gegenstand nur "als" Gegenstand möglichen denkenden Bestimmens Gegenstand "ist" – ist das eigentliche Fundament der mathematischen Wissenschaft, das dieser ihren eigentümlichen Erkenntnisinn ("allgemeinen" Erkennens) verleiht. Ich nenne ihn das "transzendente Prinzip", um mit diesem Namen an Kants Transzendentalphilosophie zu erinnern. Denn eine der größten Leistungen Kants sehe ich darin, den Sinn dieses Prinzips erkannt und von ihm in entscheidender Weise Gebrauch gemacht zu haben, was besonders deutlich wird, wenn man Kants "obersten Grundsatz aller synthetischen Urteile" betrachtet.^[10]

Die Mathematik beschäftigt sich also mit den Bestimmungen möglicher Gegenstände in dem Sinne, daß durch diese Bestimmungen nach dem transzendentalen Prinzip die (möglichen) Gegenstände selbst allgemein bestimmt sind. Das Prinzip kommt ihr ferner auch innerhalb der Methodik ihrer eigenen Arbeit zugute. Bestimmungen, welche die (in diesem Gedanken selbst wieder vergegenständlichten) erlebenden Bestimmungen von Gegenständen zu Gegenständen haben, gelten demselben Prinzip gemäß mittelbar auch für die durch die letzteren Bestimmungen bestimmbaren Gegenstände. Und ohne weiteres ergibt sich, daß auch jene ersten Bestimmungen wieder mittelbar bestimmt werden können usf. So gibt es ein mathematisches Bestimmen verschiedener Mittelbarkeitsstufen. Die Multiplikation ist z.B. ein mittelbares Verfahren additiven Zählens, in dem (mögliche) Additionsakte addiert und dadurch mittelbar mögliche Gegenstände additiv-zählend gemessen werden. Russells Typentheorie bezieht sich auf diese Mittelbarkeitsstufen des mathematischen Denkens und bringt sie richtig in Verbindung mit der Logik derjenigen Aussagen, welche Aussagen zu Gegenständen haben.

II. Die Axiome der Gegenständlichkeit

Dank ihrer allgemeinen Bezogenheit auf mögliche Gegenstände ist nun die Mathematik grundsätzlich dem Axiomensystem unterworfen, in dem der Sinn der Gegenständlichkeit überhaupt definiert wird: dem Satze der Identität, dem Satze des Widerspruches und dem Satze des ausgeschlossenen Dritten. Die Bedingungen, welche in diesen drei Axiomen formuliert werden, sind nun aber keineswegs im gleichen Sinne und mit gleicher Unmittelbarkeit auf den Gegenstand bezogen.

In dem Satze der Identität findet der Gedanke Ausdruck, daß der Gegenstand für-sich-seiend ist, genauer: daß der Gegenstand als für-sich-seiend, als transzendent gedacht wird gegenüber dem Erleben, dessen Gegenstand er ist.^[11] Dies Für-sich-sein

¹⁰ Vgl. Das Verstehen, S. 33 f.

¹¹ Hierbei ist zu beachten, daß das ("erlebte") Erleben, um das es sich hier handelt, seinerseits bereits vergegenständlicht ist, denn es wäre ja sonst nicht möglich, von ihm als einem Erleben zu sprechen, demgegenüber ein Gegenstand als transzendent gedacht wird; aber es ist weiterhin zu beachten, daß dabei dieses Erleben einen "Gegenstand" von nur relativer "uneigentlicher" Gegenständlichkeit bedeutet, einen "Gegenstand" nämlich, der seinerseits als identisch erlebt wird mit dem ihn "erlebenden" Erleben; in diesem Falle also mit eben dem denkenden Erleben, das sowohl jenes erlebte Erleben als auch den "eigentlichen" Gegenstand, den es jenem gegenüber als transzendent denkt, wiederum "erlebt". Vgl. das Verstehen, § 3 ff.

hat zur Folge und wird fassbar daran, daß der Gegenstand "identisch" derselbe bleibt im Gegensatz zu der Verschiedenheit der Erlebensereignisse, in denen er erlebt werden kann. – Der Satz der Identität bezieht sich also unmittelbar auf die Gegenständlichkeit, des Gegenstandes.

Wenn sich so der Satz der Identität mit der Gegenständlichkeit des Gegenstandes unmittelbar beschäftigt, faßt der des Widerspruches die Notwendigkeit der Erlebarkeit des Gegenstandes ins Auge und bestimmt in sogleich näher anzugebender Weise, welche Eigenschaften dem Gegenstand zugebracht werden müssen, wenn anders er als erlebbar soll gedacht werden können. Diese Erlebarkeit ist selbst eine unerläßliche Bestimmung jedes möglichen Gegenstandes, weil ein Gegenstand ja "Gegenstand" nur "ist" im Gegenverhältnis und zugleich im Unterschiede zu dem Erleben, in dem er erlebt (und zwar eben "als Gegenstand" erlebt) wird.

Er begnügt sich nun aber nicht damit, Erlebarkeit überhaupt zu fordern, sondern er nimmt auch auf die eigentümliche Art Rücksicht, in der das Erleben Gegenstände erlebt und einzig erleben kann. Hierzu genügt nämlich nicht, daß nur überhaupt die Fremdheit und das Für-sich-sein des Gegenstandes gegenüber dem Erleben erlebt wird. Die erlebte Sinnbestimmung des Für-sich-seins gegenüber dem Erleben würde ja nur das Dasein des Gegenstandes erleben lassen; aber noch nicht ein Sosein irgendwelcher Art. Es ist aber ohne weiteres einsichtig, daß ein solches Dasein ohne Sosein unerlebar sein müßte. Zum Sinne des Erlebens gehört deshalb, daß der in ihm erlebte Gegenstand auch im Sinne irgendeines Soseins, daß er "als" etwas, das ist, daß er mit irgendeiner Bestimmtheit erlebt wird: der Gegenstand muß nicht nur als polares Korrelat eines ("von sich selbst" erlebten) Erlebens erlebt, sondern in diesem Erleben zugleich bestimmt werden.

Fragen wir nun, was aus der so geforderten Eigenart des Gegenstände erlebenden Erlebens für die möglichen Gegenstände selbst gefordert werden kann, so ergibt sich für den Gegenstand als eine Bedingung seiner "Erlebarkeit" seine "Bestimmbarkeit".

Diese Bestimmbarkeit muß man wohl im Gegensatz zu jenem Für-sich-sein bereits als eine Bestimmung betrachten, die dem Gegenstand nur "transzendental", d.i. mittelbar zukommt: nämlich um der urphänomenalen Eigentümlichkeit des ihm selbst gegenüberzudenkenden Erlebens willen, als welches nämlich ein spezifisch bestimmendes Erleben bedeutet. Diese nur mittelbare Bestimmung des Gegenstandes ist dabei jedoch keineswegs etwa weniger zwingend als eine unmittelbare.

Was nun der Satz des Widerspruchs auf Grund dieser Forderung der Bestimmbarkeit (mittelbar) von dem Gegenstande fordert, ist nun wieder in dem eigentümlichen urphänomenalen Sinne des spezifisch bestimmenden¹² Erlebens begründet. Das bestimmende Erleben hat nämlich gleichsam zwei Seiten: positiv bestimmend negiert es zugleich, und negierend nähert es sich positiver Bestimmung zum mindesten an, indem es den in Betracht zu ziehenden Inbegriff möglicher positiver Prädikate des Bestimmens verkleinert. Das Bestimmen, in dem die Rose als rot erlebt wird, spricht dem zu bestimmenden Gegenstand zugleich eine Reihe möglicher anderer Bestimmungen ab: die Rose ist nicht gelb, weiß, blau usw. Die "negative" Bestimmung dagegen, welche in

¹² Das bestimmende Erleben ist nicht die einzige Grundfunktion des auf Gegenstände "gerichteten" Erlebens: es "gibt" neben ihr noch die "wertend-stellungnehmende" Funktion. (Vgl. über diese Funktionen: "Metaphysik ..." S. 17ff.)

dem Satze: die Rose ist nicht weiß, ausgedrückt würde, hat den Nebensinn, daß dem Gegenstand "irgendeine andere" Bestimmung positiv zukommt. Das Bestimmen beruht so, wie man wohl sagt, auf einem vergleichenden Unterscheiden des zu bestimmenden Gegenstandes von möglichen anderen. Auf Grund dieser positiv-negativen Zweiseitigkeit des Bestimmens muß von dem Gegenstande, der bestimmbar sein soll, gefordert werden, daß er einander entgegengesetzte Bestimmungen jedenfalls nicht an sich verbinden kann, daß ein "Sowohl - als auch" solcher Bestimmungen für ihn unmöglich ist. Das aber ist die Forderung, die der Satz vom Widerspruch (als eine Bestimmung des Sinnes der Gegenständlichkeit des Gegenstandes) formuliert.

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten charakterisiert die Funktion des Bestimmens noch genauer. Die positiv-negative Zweiseitigkeit jedes Bestimmungsaktes hat ihrerseits zum Korrelat die systematisch geschlossene Verfassung des Inbegriffes möglicher Bestimmungen, unter denen in dem Akte des Bestimmens gleichsam gewählt wird. Die systematische Verfassung dieses Inbegriffes besteht in folgendem. Der Inbegriff umfaßt alle möglichen Bestimmungen, die in dem betreffenden Falle überhaupt in Frage kommen: das heißt alle diejenigen, die unter dem angewandten "Gesichtspunkt" – der "Fragestellung" gleichsam, "unter der" bestimmt wird – überhaupt erlebbar sind. Alle diese möglichen Bestimmungen stehen – unter jenem Gesichtspunkt miteinander verglichen – in festen, gegebenenfalls mannigfach abgestuften Ähnlichkeitsbeziehungen zueinander; derart, daß jede positiv gesetzte Bestimmung zugleich fest bestimmte Ähnlichkeitsverhältnisse zu jeder der möglichen übrigen setzt. Das System ist andererseits in sich geschlossen: unter der betreffenden Fragestellung betrachtet, ist keine der möglichen Bestimmungen vergleichbar und ähnlich irgendeiner Bestimmung, die selbst außerhalb des Systems läge. Diese Verhältnisse sind Folge und Ausdruck davon, daß alle die "sinnhaften" Bestimmungen des Systems – eben unter jenem "Gesichtspunkt" – erlebend konstruiert werden nach einem und demselben in sich bestimmten Gesetz.^[13]

Diese Eigentümlichkeit des Bestimmens, daß es sich gründet auf ein (unformuliertes) Erleben solcher geschlossener Systeme von erlebensmöglichen Bestimmungen, wird nun in dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten angewandt; um das Verhältnis festzulegen, in dem der Gegenstand zu dem ihn bestimmenden Bestimmen stehen muß – wenn anders er überhaupt (durch dasselbe) bestimmbar sein soll. Wenn ein Gegenstand (unter einem Gesichtspunkt) überhaupt bestimmbar ist, und wir irgendeine der dem betreffenden System angehörigen Bestimmungsmöglichkeiten ins Auge fassen, so muß er entweder durch diese oder durch eine der anderen Bestimmungen des Systems bestimmbar sein; anders gesagt: es ist ausgeschlossen, daß er "weder" durch die erstere "noch" durch die (den Inbegriff der übrigen zur Wahl stellende) "kontradiktorische" Bestimmung getroffen würde.

In diesem Axiom ist zum Unterschied von den beiden anderen nichts mehr ausgesagt über Bedingungen, denen der Gegenstand rein in sich selbst genügen muß. Die ausge-

¹³ Es ist nicht notwendig, daß dieses bestimmende Gesetz und die vergleichenden Dimensionen, in denen es bestimmt, ausdrücklich gemacht werden oder auch nur werden können. Die Dimensionen der Vergleichung innerhalb des Raumes, der Zeit, des Farben- oder Tonsystems können wir z.B. exakt bezeichnen, die im System möglicher Geruchs- oder Geschmackserlebnisse dagegen nicht. Noch unübersehbarer kompliziert und vielleicht auch noch "irrationaler" als die letztgenannten erscheinen Systeme eines mehr "geistigen" erlebenden Bestimmens, wie etwa die Systeme der "Eindrücke", die wir von der Eigenart von Landschaften oder von dem Temperament oder dem Charakter von Personen haben.

sprochene Bedingung betrifft vielmehr das Verhältnis, in dem der Gegenstand zu dem erlebenden Bestimmen und den in diesem angewandten Bestimmungssystem stehen muß. Von dem Gegenstand verlangt er dabei nur, daß er unter dem angewandten Gesichtspunkt überhaupt bestimmend erfassbar sein müsse, oder: von dem Gesichtspunkt her gesehen, daß dieser, wie ich es nennen will, dem Gegenstand (genauer: seiner "Beschaffenheit"¹⁴) "adäquat" sei. Ist dieser Bedingung genügt, so ergibt sich das übrige aus dem Sinne des Bestimmens selbst, ohne daß besondere weitere Forderungen an den Gegenstand dabei erwachsen. Denn der ausschließende Alternativcharakter des Bestimmens trifft dann den Gegenstand, wenn ich es so nennen darf, ohne eigenes Zutun: es liegt am Bestimmen und nicht mehr am Gegenstand, daß ein konkurrierendes Sichhineindrängen "heterogener" Gesichtspunkte nicht mehr möglich ist, sobald einmal ein Gesichtspunkt des Bestimmens, eine bestimmte Art des Fragens als zuständig angesetzt ist.

III. Die Mängel der üblichen Formulierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.

- a) *(Der Gesichtspunkt des Bestimmens muß als dem zu bestimmenden Gegenstande "adäquat" vorausgesetzt werden)*

Die Tatsache, daß wir in dem Satze des ausgeschlossenen Dritten eine Bestimmung vor uns haben, die den Gegenstand nicht mehr unmittelbar angeht, sondern das Bestimmen charakterisiert und dann das Verhältnis, in dem der Gegenstand zu dem Bestimmen stehen muß, diese Tatsache wird indirekt für die Auflösung der Brouwerschen Schwierigkeiten bedeutsam. Es ist, wie wir sahen, im Sinne des Bestimmens und damit auch im Sinne des Satzes des ausgeschlossenen Dritten gelegen, unter Gesichtspunkten angewandt zu werden, durch welche jedesmal ein System eingeführt ist, innerhalb dessen die Bestimmungen getroffen werden können. Von diesem Gesichtspunkt und damit von diesem System wird dabei vorausgesetzt, daß sie dem zu bestimmenden Gegenstande adäquat sind. Dieses Spezifikum des Satzes des Dritten mag an einigen Beispielen demonstriert werden.

Wir stellen zunächst die Frage: was bedeutet der Begriff des "Dritten", das hier ausgeschlossen wird? – Wenn ich sage: "der Angeklagte ist entweder schuldig oder unschuldig, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht", so bedeuten mögliche Prädikate wie breit-schultrig, blond, sanftmütig, obwohl sie doch keineswegs dasselbe besagen, wie die Begriffe jener Alternative, keine "dritten" Bestimmungen von der Art, welche hier ausgeschlossen sein würde. Der Grund hierfür liegt auf der Hand: die Gesichtspunkte, unter denen in jedem dieser Fälle bestimmt wird, sind einander "heterogen", die unter ihnen jedesmal möglichen Bestimmungen konkurrieren daher nicht miteinander. —

In diesem Beispiele sind nun die einander heterogenen Gesichtspunkte, die wir heranzogen, jeder für sich dem Gegenstande adäquat. Es gibt aber auch Fälle, in denen der

¹⁴ Die "Beschaffenheit" wird zu dem Gegenstand selbst in demselben Verhältnis gedacht wie das oben erwähnte Sosein zum Dasein. Man fühlt sich versucht, für das andere Glied dieses-Verhältnisses das Wort "Geschaffenheit" einzuführen. Die in der bisherigen Philosophie immer, wieder versuchte rein objektive Abgrenzung von Geschaffenheit und Beschaffenheit führt, wie ich weiter unten genauer darlege, notwendig zu Unklarheiten. Richtig verstanden muß ein Schichtunterschied relativer Objektivität und Subjektivität des Sinnes zwischen beiden gedacht werden.

Gesichtspunkt, der angewandt wird oder doch werden soll, dem Gegenstande inadäquat erscheint. Ein Beispiel solcher Inadäquatheit hätten wir in der Frage: Ist Weihnachten blau? In solchen Fällen fühlt man sich nun geneigt zu behaupten: die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, die hier die Aussage ergeben würde: "Weihnachten ist entweder blau oder nicht-blau" hat keinen Sinn: und zwar eben darum, weil das Bestimmen hier unter einen Gesichtspunkt gestellt ist, der dem zu bestimmenden Gegenstande nicht adäquat ist: nämlich den Gesichtspunkt der Farbigkeit. Die übliche allgemeine Fassung des Drittsatzes nimmt jedoch merkwürdigerweise hierauf keine Rücksicht: es sieht so aus, als wolle sie die mögliche Sinnlosigkeit einer solchen Fragestellung nicht zugeben.

Wir stoßen hier auf eine eigentümliche Unzulänglichkeit oder mindestens Unklarheit in der üblichen Fassung des Drittsatzes. Jener von uns betonte urphänomenale Umstand wird vernachlässigt: es bleibt völlig unbeachtet, daß alles mögliche Bestimmen unter Gesichtspunkten steht, daß es unter diesen den Gegenstand an einem bestimmten, sozusagen vorgegebenen, in sich geschlossenen System möglicher Prädikationen mißt, und daß es ohne einen solchen Gesichtspunkt und ein solches System kein Bestimmen (und somit auch keine Gegenstände) "geben" kann. Berücksichtigt man nun, daß dem Sinne des Gegenstandes und des erlebenden Bestimmens gemäß das Bestimmen den Gegenstand nicht vom Subjekt her sozusagen aus Nichts schaffen soll, daß vielmehr der für-sich-seiende Gegenstand und die diesem objektiv eigene "Beschaffenheit" jedesmal den Grund enthalten soll, im Hinblick auf den gewisse Bestimmungen ("objektiv") richtig, andere dagegen falsch sind, so bemerken wir, daß der hier vernachlässigte Umstand eine wichtige Forderung beiseite schiebt. Nämlich, die oben schon formulierte Forderung, daß der Gesichtspunkt (und das vorgegebene System) des Bestimmens dem Gegenstande adäquat sein muß.

Es ist leicht zu sehen, wie dieses Übersehen einer entscheidenden Bedingung zu erklären ist. Man hat es unterlassen, innerhalb des Begriffes möglicher "falscher" Bestimmungen einen Unterschied zu machen, den man als den der eigentlichen Falschheit von der Sinnlosigkeit bezeichnen könnte. Falschheit beruht auf der Verwechslung einer Bestimmung der negativen Seite des Bestimmens mit der positiven; das so falsch verwendete Urteil selbst steht dabei unter einem Gesichtspunkt oder einer Fragestellung, die als dem Gegenstand adäquat vorausgesetzt werden: in diesem Falle muß also entsprechend dem hier in der üblichen Fassung zuständigen Drittsatze unter demselben Gesichtspunkt eine richtige Bestimmung möglich sein. Sinnlos dagegen würden Bestimmungen heißen, die unter einem inadäquaten Gesichtspunkt getroffen werden, derart daß auch das kontradiktorische Gegenteil, das unter demselben Gesichtspunkt festzulegen sein würde, (bzw. irgendeine der in diesem kontradiktorischen Urteil zusammengefaßten möglichen Bestimmungen) den Gegenstand nicht bestimmt. – Wenn man diesen Unterschied zwischen Falschheit und Sinnlosigkeit eines Urteils vernachlässigt, und andererseits das negative Urteil als das Für-falsch-erklären eines positiven ansieht¹⁵ (was sinngemäß möglich ist), so gelangt man leicht dazu, auch die sinnlose Bestimmung (den nichts-bestimmenden Bestimmungsversuch unter einem inadäquaten Gesichtspunkt) als eine Form der Negation anzusehen. Infolge einer solchen Einstellung hat man bei der üblichen Formulierung des Dritten-Axioms in den Inbegriff der möglichen Prädikate, die einer möglichen positiven Bestimmung gegensätzlich gegenü-

¹⁵ Vgl. hierzu die Ausführungen über den Sinn der Negation bei Sigwart, Logik I (3. Aufl., Tübingen 1909) § 20.

berstehen, auch die in Wahrheit "unmöglichen" sinnlosen Bestimmungen versteckterweise aufgenommen.

b) (Exkurs über die weltanschaulichen Gründe der Unklarheit, die in der mangelhaften Formulierung des Drittsatzes zutage tritt)

Wir entdecken so eine bei der üblichen Formulierung des Drittsatzes untergelaufene Unklarheit, die natürlich zuletzt begründet ist in mangelhafter Einsicht in die auszu-drückenden urphänomenalen Sinnverhältnisse, auf denen Bedeutung und Recht des Satzes ruhen. Es wäre jedoch unrichtig, wenn man diese Unklarheit und die aus ihr folgende Unterlassung einfach als Denkfehler abtun wollte, sie hat vielmehr tiefliegende weltanschauliche Gründe. Ich kann es hier nicht unternehmen, diese Gründe völlig aufzudecken; nur einige Andeutungen seien mir gestattet.

Der naive Mensch und ebenso die grundsätzlich objektivistisch unterbaute Kultur des Abendlandes pflegt nicht der Betrachtung des Urverhältnisses Erleben-Objekt und dem eigentümlichen Sinn desselben zugewandt zu sein, sondern wie das praktische Leben an der Sachlichkeit der Sachen interessiert ist, so glaubt man auch erkennend nur mit Sachen, nicht aber zugleich in positivem Sinne mit dem erlebenden Erkennen selbst zu tun zu haben. Daß Objekt (Sein) und Subjekt (Erleben) in Wahrheit korrelative "Grenzbegriffe" sind,^[16] daß die Bestimmungen "subjektiv" und "objektiv" immer nur in dem relativen Sinne eines Mehr oder Weniger, Eigentlich oder Uneigentlich (auf Objekte) angewandt werden können, und daß den Ich innerhalb der Objektivität entsprechend den Stufen dieser Eigentlichkeit stets Schichtenunterschiede irgendwie eingeführt werden müssen – alle diese Einsichten sinnerforschender Selbstbesinnung bleiben deshalb in der bisher herrschenden weltanschaulichen Einstellung (des Abendlandes) unbeachtet. Man ist vielmehr geneigt, sich unser erlebendes Bestimmen (Erkennen) auf absolut und an sich selbst objektive Objekte gerichtet zu denken – und bei der Betrachtung dieser Objekte dann die Subjektivität des Erlebens selbst aus dem Auge zu verlieren: das ichhafte Erleben selbst wird dabei ("psychologistisch") mißverstanden als ein grundsätzlich den "anderen" Objekten gleichgeordnetes und darum an sich höchstuntergeordnetes Nur-Objekt, und die Objekte werden in entsprechender Weise mißverstanden als absolut und "an sich selbst" objektive Objekte in einer ihrerseits ebenso absolut objektiv zu denkenden Welt – und wenn man dann versucht, sich die Grundverhältnisse der Welt und des Erkennens klarzumachen, so vernachlässigt man die unabstreifbare Beziehung auf das erlebende Subjekt und macht dementsprechend zwischen den "ontologischen" (oder gar vermeintlich "optischen", d.h. absolut-objektiven) Verhältnissen des "Seienden" und den "logischen" des (möglichen) Erlebens keinen klaren Unterschied. Höchstens als Quelle des möglichen Irrtums oder der Sünde findet das Subjekt in der antiken Philosophie und der christlichen Weltanschauung notgedrungen eine widerwillige Anerkennung; der zuerst bei Kant^[17] aufdämmernde Gedanke, das Subjektive, das Erleben als solches, könne ein autonomer Quell von (allgemeingültiger und notwendiger) "Wahrheit" sein, bleibt jedoch wie ohne Vorgang so auch ohne eigentliche Nachfolge.

¹⁶ Vgl. Metaphysik; besonders S. 25 f. und S. 38ff.

¹⁷ Nach noch unbestimmter gebliebenen Ansätzen bei Leibniz und sogar schon in der deutschen Mystik.

An diesen so als absolut gedachten Objekten wurde nun freilich bemerkt, daß sie sozusagen dennoch nicht von absoluter Homogenität oder, wie man auch sagen könnte, von absoluter Einschichtigkeit sind. Man unterschied an ihnen etwa "Substanz" und "Akzidentien". Weiß, süß, hart bezeichnete man von der Antike und Scholastik bis Locke als die "Eigenschaften" oder "Akzidentien" des Zuckers, der selbst als "Träger", als "Substanz" dieser Eigenschaften gedacht wurde. Die Substanz wurde dabei als das "Wesen" (essentia) aufgefaßt, das gleichsam erst in seinen Akzidentien und durch sie in die Erscheinung (oder gar in die "Existenz") tritt. Daß solche Unterscheidungen (zu denen etwa noch die von Ding-Beschaffenheit, Dasein-Sosein als gleichbedeutende gehören) gemacht werden konnten, beruhte ganz offenbar auf einem Gefühl davon, daß der Sinn "Objekt" in Wahrheit nicht durch eine absolute Objekthaftigkeit erfüllt ist. Diese Unterscheidungen am Objekt würden nämlich, wenn sie sich selbst richtig verstünden, nichts anderes besagen, als daß das Objekt nicht als absolut und gleichsam einschichtig objektiv gedacht werden, sondern ein relativ Subjektives und Objektives an den Objekten selbst unterschieden werden muß. Am deutlichsten kommt das Gefühl hiervon in dem Begriffspaar "Wesen -Erscheinung" zum Ausdruck. Seit Plato war ja die "Erscheinung" eben das "uns", genauer "unseren" Sinnen Erscheinende, das eben darum von dem wahren Sein oder "Wesen" nichts zu enthüllen vermag. Und wenn Spinoza Substanz und Attribut dadurch unterscheidet, daß die Substanz an sich (per se) ist, das Attribut aber das, was der Verstand (intellectus) an der Substanz, als ihr Wesen ausmachend, erkennt, so lebt auch darin ein Bewußtsein davon, daß das Objekt erst durch Einordnung in eine gleichsam zweischichtige Ordnung den Sinn seiner Objekthaftigkeit erhält: dadurch nämlich, daß es einerseits als für-sich-seiend gedacht, aber andererseits und ebenso integrierend, als für-sich-seiend eben gedacht wird, ein Gedanke, in welchem zweierlei Objektives: eigentlich Objektives (Physisches) und relativ subjektives Objektives (Psychisches) unterschieden und zugleich in Unabhängigkeitsbeziehung nebeneinander gestellt werden. – In all diesen Unterscheidungen also, die die abendländische Philosophie vorgenommen hat, um hinter das Geheimnis und das "Wesen" des Sachhaften zu kommen, ist implizite schon der Gedanke enthalten, daß am "Sein" des Objekts das Subjekt einen konstitutiven Anteil hat, d.h. aber, daß der Sinn der Objektivität Relation auf das Subjekt einschließt und – zu Ende gedacht – sogar Relativität der Objektivität selber. – Freilich muß festgehalten werden, daß dieser Gedanke eben nur implizite in den Begriffspaaren Substanz - Akzidents usw. enthalten war und aus der sie begründenden Unterscheidung erst entbunden wird von einem Standpunkt aus, der die Korrelation von Subjekt und Objekt als konstituierend für das Objektbestimmen erkannt hat. Die absolut objektivistische Haltung der abendländischen Philosophie vor Kant brachte jedoch diese Sinnverhältnisse nicht zur Klarheit und sah deshalb in der Unterscheidung von Substanz und Akzidents, Wesen und Erscheinung usw. nicht eine Unterscheidung von relativ Objektivem und relativ Subjektivem, sondern nur eine solche von verschiedenen objektiven Beständen an dem, bzw. innerhalb des vermeintlich "an sich", d.i. absolut Objektiven selbst. Die eigenschaftlichen Beschaffenheiten die man noch keineswegs als "Bestimmungen" auffaßte – liegen dann für diese Auffassung in derselben Ebene der Objektivität bzw. der (realen oder idealen) Wirklichkeit wie das "Ding-an-sich", die Substanz, das absolute Objekt. Sie sind disparate und miteinander unvergleichbare Objekte am Objekt (wie die Hand am Arm, der Arm am Rumpf). Daß, innerhalb dieser Auffassung Schwierigkeiten auftreten mußten in bezug auf das Verhältnis, in dem innerhalb der als absolut und damit als einschichtig gedachten Objektivität einerseits die Substanz zu ihren Eigenschaften, andererseits die disparaten Eigenschaften untereinander zu denken seien, ist verständlich. So denkt z.B. Her-

bart nur konsequent im Sinne der weltanschaulichen Voraussetzungen des Abendlandes, wenn er bestreitet, daß "einem" Dinge "viele" Eigenschaften oder Merkmale "inhärieren" könnten, da ja schon das Besitzen eines jeden dieser Merkmale ein von dem Besitzen des anderen zu unterscheidendes Was bedeuten und so die "Einheit" des Dinges aufheben oder zurückschieben müsse; weshalb er dann – die objektivistische Auffassung bewußt zu Ende führend – jedem solcher unvergleichbaren Merkmale ein besonderes reales Wesen entsprechen läßt.

Solche Versuche konsequent objektivistischen Denkens wie dieser Gedanke Herbarts führen nun aber auf eigentümliche Schwierigkeiten. Wenn Herbarts reale Wesen als objektiv für-sich-seiende und untereinander verschiedene existieren (in derselben Weise wie die Dinge, deren Eigenschaften sie sind), wenn sie also – mit anderen Worten untereinander ganz verschiedenen Systemen von Dinglichkeiten angehören; z.B. weiß dem System der Farben, hart dem der Körper, süß dem der Geschmäcke – wie können sie dann bezogen sein auf das "eine" Ding, dessen Eigenschaften sie doch sind; wie auf den einen Ort, an dem dieses Ding sein "Dasein" hat? Denn das Ding selbst gehört seinerseits, insofern es existiert, an einen und nur einen Ort der Welt, welche Welt wieder ein besonderes, von den Systemen der Eigenschaften (des "Soseins") abermals verschiedenes System darstellt. Aus solchen Schwierigkeiten suchte man sich zu retten durch die meist unausdrücklich und unklar gebliebene Folgerung, daß die absolut objektiven Wesen einander nicht disparat seien, nicht verschiedenen objektiven Beschaffenheitssystemen angehörten, sondern daß sie "an sich", d.h. eben als absolute objektive Wesen, nur einem einzigen System einzuordnen sein würden, während ihre anscheinende Dispartheit als "Schein", als "subjektive Täuschung" verstanden werden müsse. Dies ist an sich gleichbedeutend mit dem Gedanken, daß es einen und nur einen höchsten und umfassenden Gesichtspunkt eines eigentlichen und wahren Bestimmens geben müsse derart, daß dieses Bestimmen dann auf das eine und einheitliche "Wesen" an sich, auf das absolute Objekt, nicht aber auf seine disparaten, trügerischen Erscheinungsweisen gehe. Aber da man doch wieder das "Sein" der Sachen von dem "Sinn" des erlebenden Bestimmens nicht grundsätzlich und klar unterschied, konnte man auch nicht den Gesichtspunkt des Bestimmens (und das System, dem die Sachen bestimmend eingeordnet werden) von selbst objektiv gedachten Eigenschaften der Sachen unterscheiden.

In der Unsicherheit aller dieser Ungeklärtheiten werden immerhin die faktischen, alltäglich von uns angewandten Bestimmungsweisen, die einander heterogen sind und Disparates zu erfassen meinen, in ein Licht gestellt, in dem sie als unvollkommene Verwirklichungen eines zu fordernden Ideals erscheinen. Und dann liegt es nahe, die Unvollkommenheit, die unserem faktischen Bestimmen diesem Ideal gegenüber eigen ist, dahin auszulegen, als hätten wir in diesem Bestimmen und seinen Systemen nur einen Teil eines zu suchenden Ganzen in der Hand. Denn irgendeine Annäherung an das zu erkennende Wesenhafte meint man doch auch in jeder dieser unvollkommenen, einander heterogenen Beschaffenheitsbestimmungen zu finden, und so glaubt man, daß mit jedem ihrer Systeme eben "ein Teil" der einen wesenhaften Wahrheit erfaßt werden könne.

Der letzte Grund aller dieser Verwirrungen liegt darin, daß man sich einerseits von relativ festgelegten Formulierungen grundlegender Bestimmungen leiten läßt, und zwar von relativ inadäquat, bleibenden, daß dann aber andererseits der erlebende Instinkt für

den Sinn sich immer wieder geltend macht und zu Gedanken drängt, die in Widerspruch zu jenen gleichwohl festgehaltenen Formulierungen stehen.^[18]

Der absolutistischen Fassung des Objektgedankens erscheint es selbstverständlich, daß Objektivität selbst eine objektive Eigenschaft der Objekte, ja daß sie die eigentlichste Eigenschaft derselben sei. Ebenso objektive Eigenschaften sieht sie zugleich in den Grundbestimmtheiten des erlebenden Bestimmens, da diesen – nach dem instinktiv zur Geltung gebrachten transzendentalen Prinzip – alle Objekte entsprechend gedacht werden müssen. Das Bestimmen der Objekte als objektiv fordert nun ihre Einordnung in ein "Universum", in ein System des objektiven Daseins, oder der daseienden Objekte derart, daß auch das Subjekt in dieses System einbezogen wird (indem es zugleich in relativem Sinne selbst objektiviert wird).^[19] Da es nun zum instinktiv verstandenen Sinne des Subjekts gehört, "einzig" zu sein, können mehrere disparate "Subjekte" nicht gedacht werden. Und weil, wie soeben gesagt, dies "einzige" Subjekt selbst (relativ objektiviert) in das System der als solcher bestimmten Objekte eingeordnet wird, so könnte auch nur ein einziges System gedacht werden, in dem die Objekte wahrhaft, d.h. wie man meint "an sich" objektiv (oder "seiend") sein würden. Alle in wahren und letztem Sinne als solche zu denkenden Objekte müßten dann folgerichtig als diesem selben System zugehörig gedacht werden (es kann nicht mehrere "Welten" nebeneinander "geben"). Die unleugbare Möglichkeit einander disparater Systeme des Bestimmens nun würde unanstößig sein, wenn man dem Bestimmen selbst und diesen Systemen einen relativ subjektiveren Sinn beimäße als den jeweilig durch sie zu bestimmenden Objekten; die angegebenen Sinn-Verhältnisse, die man – wenn auch nur unklar – spürt, bewirken jedoch, daß diese Mehrheit bestimmender Systeme vom Standpunkt des absoluten Objektivismus gesehen in einem unerträglichen Widerspruch zu stehen scheint zu der Objektivität der Objekte. Diesen Widerspruch wieder sucht man dadurch zu lösen, daß man die vielen Systeme (mit Recht) als inadäquat ansieht und nun wieder – absolut-objektivistisch – anstatt relative Inadäquatheit jedem bestimmenden System zuzuschreiben, ein einziges ideales System des wahrhaften Bestimmens fordert, das die Objekte in ihrer absoluten, ihnen selbst eigenen Objektivität fassen würde. Alle inadäquaten Systeme erscheinen damit, insoweit sie inadäquat sind, als Systeme falschen Bestimmens. Die Logik aber glaubt auf solches falsche Bestimmen keine Rücksicht nehmen zu brauchen, da sie ja lediglich die Eigenschaften und Regeln eines richtigen Bestimmens festlegen will. Sie fingiert deshalb ein Idealsystem des Bestimmens, das die Bestimmtheiten des "Wesens" erfassen würde vermitteltst eines durch die lediglich akzidentiellen oder phänomenalen Bestimmungen gleichsam hindurchdringenden Erkennens.

Aus der Wirkung aller dieser unklar bleibenden, einstellungsmäßigen Voraussetzungen nun ist jene Unterlassung zu verstehen, mit der in der Fassung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten die für alles mögliche Bestimmen wesentliche Bezugnahme auf die Gesichtspunkte und die Systeme der Bestimmung sowie auf die Forderung der Adäquatheit jener Gesichtspunkte zu den Gegenständen unberücksichtigt bleibt.^[20]

c) *(Anwendung unserer Ausführungen auf ein Beispiel und Zusammenfassung unserer Ergebnisse)*

¹⁸ Vgl, die soeben gemachten Ausführungen über Substanz und Akzidens.

¹⁹ Vgl. Metaphysik S. 27 über den Sinn von "Sein" oder "Real-sein".

²⁰ Vgl. Anhang, I.

Wir wollen nun die soeben angestellten Überlegungen anwenden auf das Beispiel, an dem wir die Möglichkeit eines dem Gegenstande inadäquaten Bestimmens aufzeigten.

Wenn man im Sinne unserer obigen Ausführungen den Drittsatz in der üblichen Fassung anwenden will, ohne Rücksicht auf die Adäquatheit bestimmender Gesichtspunkte, so müßte man sagen: es hat Sinn und es ist richtig, alternativ zu behaupten, auch Weihnachten müsse entweder blau oder nicht-blau sein. Die versteckte Voraussetzung dieses Gedankens ist folgende. Man glaubt, daß der Gesichtspunkt der Farbigeit und das System möglicher Farbbestimmungen sich richtig verstanden mit den Gesichtspunkten aller übrigen Bestimmungen möglicher Gegenstände überhaupt und den sich unter ihnen ergebenden Systemen zu einem in sich einheitlichen Ganzen müßten zusammenordnen lassen. Und zwar hält man dieses gegenseitige Sich-ergänzen möglicher Systeme des Bestimmens deshalb für notwendig, weil man voraussetzt, daß das ideale Bestimmen, das Bestimmen des "Wesens" möglicher Gegenstände überhaupt nur unter einem einzigen Gesichtspunkt stehen würde. Insoweit darum – so meint man – irgendein faktisches Bestimmen ein echtes Bestimmen überhaupt ist, müsse durch seinen Gesichtspunkt dieser eine ideale irgendwie hindurchschimmern. Eben darum aber würde folgen, daß das System jedes der Erkenntnis dienlichen Bestimmens, also eines jeden, auf das die "Logik" überhaupt Rücksicht zu nehmen Anlaß habe, sich zuletzt müsse auffassen lassen als Teilsystem des unter jenem umfassenden Gesichtspunkt aufzustellenden Systems.

Das Nicht-blau der Alternative würde dann nicht mehr auf irgendeine unter den möglichen Farbbestimmungen positiv bestimmend abzielen, sondern auf eine derjenigen Bestimmungen, die in jenem umfassenden Idealsystem neben "blau" übrigbleiben würden, oder vielmehr genauer neben derjenigen "Wesensbestimmung", die unter dem entsprechenden idealen Gesichtspunkt an die Stelle von "blau" treten würde, und deren Sinn durch unser "blau" nur in einer irgendwie getrübten Weise hindurchschimmert.

Wir setzen nun die geschichtlich-weltanschaulich bedingten Motive für die unzulängliche Formulierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beiseite und stellen als Ergebnis unserer bisherigen Betrachtungen folgendes fest. Eine Sinn-erforschend richtige Formulierung unseres Axioms müßte die Bedingung zum Ausdruck bringen, daß die Bestimmungen, zwischen denen der Satz seine ein Drittes ausschließende Alternative stellt, unter einem dem zu bestimmenden (möglichen) Gegenstande adäquaten Gesichtspunkte getroffen sein müssen. Für Bestimmungen, welche nicht adäquat sind oder welche sogar dem Sinne des betreffenden Bestimmens gemäß als inadäquat gemeint sind, ist dagegen jene Alternative nicht zuständig. Oder um es noch genauer zu sagen: in diesen Fällen geht die Tragweite dieser Alternative nicht auf den zu bestimmenden möglichen Gegenstand; denn der Sinn des Bestimmens selbst kommt zwar in jener Formulierung richtig zum Ausdruck, aber Bestimmen ist ja Bestimmen des zu erlebenden Gegenstandes nur unter Voraussetzung seiner Adäquatheit, inadäquates Bestimmen bestimmt daher gar nicht den Gegenstand: es bedeutet eigentlich nur einen fehlgehenden (oder doch sein Ziel nicht voll erreichenden) Versuch des Bestimmens; es trägt also für den zu bestimmenden Gegenstand entweder gar nichts oder doch nichts völlig Zwingendes aus.

IV. Das Problem Brouwers.

Diese Analyse des Sinnes des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten war notwendig, um über die Brouwerschen Schwierigkeiten Klarheit zu gewinnen. Wie weit handelt es sich, so fragen wir jetzt, in der Mathematik, zumal in der Mathematik unendlicher Bereiche,

um adäquate Bestimmung von Gegenständen? Unsere Untersuchung hat sich dabei zunächst an dem eigentümlichen Sinne zu orientieren, in dem das mathematische Bestimmen überhaupt ein Bestimmen von Gegenständen bedeutet. Das mathematische Bestimmen ist nun, wie wir unter I bereits dargelegt haben, allgemein nach dem transzendenten Prinzip ein Bestimmen (möglicher) Gegenstände; es ist dadurch ausgezeichnet, daß ich mich, anstatt die zu bestimmenden Gegenstände selbst zu betrachten, mit den (möglichen) Bestimmensakten beschäftige, in denen der Sinn der Bestimmungen der Gegenstände konstruiert wird. Eine solche Art des Bestimmens ist ihrerseits möglich, weil wir – eben nach dem transzendenten Prinzip – gewiß sind, daß die Bestimmungen, die wir über diese Konstruktionen – und zwar aus dem Sinne der Konstruktionen selbst – treffen, sich gleichsam übertragen auf die durch sie bestimmbareren Gegenstände resp. Gegenstandsmomente. Diese sinnhaften Konstruktionen (Zahlen, Funktionen, Mengen usw.), die sich transzendental mittelbar auf Gegenstände beziehen, stellen also die unmittelbaren "Gegenstände" der Mathematik dar, und zwar in einem cum grano salis zu nehmenden Sinne der Gegenständlichkeit. Dies war ebenfalls dargelegt und wird in einem etwas späteren Zusammenhang nochmals zur Sprache kommen.

Es ergibt sich so die Notwendigkeit, innerhalb des nach dem transzendenten Prinzip sich vollziehenden mathematischen Bestimmens zweierlei Arten oder Grade von Gegenständen auseinanderzuhalten: die Konstruktionen (bzw. die den Sinn der Konstruktionen zum Ausdruck bringenden Symbolgegenstände) und andererseits die durch sie bestimmbareren möglichen Gegenstände (einer denkbaren Welt). Das Problem der Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten muß demnach geklärt werden, indem wir zunächst untersuchen, ob jener Satz für beide Arten von Gegenständlichkeiten je für sich angewendet werden kann und muß (Abs. a und b). Da ferner für die Mathematik das mittelbare Bestimmen durch die soeben erwähnte transzendente Übertragung entscheidend charakteristisch ist, so ergibt sich dann als zweite Frage, ob unser Satz auch da anwendbar ist, wo durch die Bestimmung eines Gegenstandes der hier unterschiedenen Arten gerade der andere transzendental bestimmt werden soll. Bei der Beantwortung dieser zweiten Frage wird auf das Verhältnis dieser beiden Gegenständlichkeiten (nämlich des vergegenständlichten Sinnes und der durch ihn zu bestimmenden möglichen Gegenstände) zu achten sein, und besonders auf die Adäquatheit des in dem ersten Gegenstände lebenden oder ausdrücklich werdenden Sinnes zu der (mittelbar) zu bestimmenden Beschaffenheit des zweiten (Abs. c und d).

Brouwer hat die Unterscheidung der zweierlei Gegenstände und die damit gegebenen Schwierigkeiten ebensowenig berücksichtigt, wie es der herkömmlichen Formulierung des Dritzensatzes eingefallen ist, auf die Notwendigkeit des adäquaten Gesichtspunktes hinzuweisen, unter dem er angewendet werden muß. Beide Gedanken aber, das transzendente Prinzip (und die mit ihm gegebene Unterscheidung von in relativ verschiedenem Sinne gegenständlichen Gegenstandsarten) einerseits, die Notwendigkeit des adäquaten Gesichtspunktes andererseits wollen wir nun in unserer Erörterung zum Leitfaden nehmen.

a) *Betrachtung der sinnhaften Konstruktionen als "Gegenstände".*

Stellen wir uns nun die Gegenstände, um deren Bestimmung es sich handelt, zunächst wieder vor Augen. Wir haben einerseits die Bestimmensakte, in denen der Sinn des Bestimmens von (möglichen) Gegenständen konstruiert wird: die Konstruktionen oder Konstruktionsgesetze. Diese müßte man als die unmittelbaren "Gegenstände" der Ma-

thematik ansprechen. Es ist aber festzuhalten, wie nochmals hervorgehoben sei, daß diese mathematischen Konstruktionen, wenn sie auch selbst vergegenständlicht werden, doch als relativ nichtgegenständlich zu betrachten sind im Verhältnis zu den in ihnen bestimmten (möglichen) Gegenständen, daß sie Gegenstände einer – wenn man will – weniger gegenständlichen Schicht²¹ der Gegenstandswelt überhaupt darstellen, mithin von jenen "eentlichen" Gegenständen scharf zu unterscheiden sind. Sie würden im Gegensatz zu jenen eentlichen Gegenständen als Nicht-Gegenstände aufgefaßt werden müssen. Da sie aber als Nicht-Gegenstände keiner bestimmenden Betrachtung unterworfen werden können, werden auch sie "vergegenständlicht" einerseits durch Auffassung als "seelische Ereignisse", andererseits mit Hilfe ihrer "Ausdrücklichmachung" in Symbolen. – Die "eentlichen" Gegenstände bilden dann die zweite Art der von uns in Betrachtung zu ziehenden Gegenstände. Sie werden nur mittelbar bestimmt durch die spezifisch mathematischen "Gegenstände", d.i. die sinnhaften Konstruktionen oder Konstruktionsgesetze.

Wie steht es nun mit der Geltung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für diese sinnhaften Konstruktionen resp. Konstruktionsgesetze? Betrachten wir die Zahlenreihe, d.i. das sinnhafte Konstruktionsgesetz, das die unendliche Menge der Zahlen definiert. Dieses ist, wie gesagt, als "Gesetz", d.h. als ein Sinn kein eentlicher Gegenstand, zum wenigsten nicht ein Gegenstand in derselben Schicht der Gegenständlichkeit wie die (möglichen) Gegenstände "der Welt", die durch das Konstruktionsgesetz bestimmbar sind; ebenso dürfen die Zahlen (Ziffern) der Zahlenreihe hier nicht als solche eentlichen Gegenstände betrachtet werden: sie gelten vielmehr nur als sinnhaltige Symbole: Symbole eben "des" Sinnes, der in den möglichen Erlebnissen der Anwendung des Konstruktionsgesetzes auf eentliche Gegenstände "lebt".

Doch gilt für das Konstruktionsgesetz, sofern es nun andererseits in seiner bedingten relativen und, wenn man will, uneentlichen Gegenständlichkeit doch wieder als Gegenstand aufgefaßt wird, der Satz vom ausgeschlossenen Dritten uneingeschränkt. Denn wenn wir das Konstruktionsgesetz der Zahlenreihe selbst als Gegenstand betrachten, so gilt von diesem Gegenstand ungeachtet der Unendlichkeit der Menge der zum Zweck seiner Ausdrücklichmachung zu konstruierenden Zahlen: dieser Gegenstand hat von zwei kontradiktorischen Bestimmtheiten E und Nicht- E eine und nur eine. Das heißt: wenn unter E ein (durch das Gesetz festgelegtes und dann in den nach ihm zu konstruierenden "Zahlen" ausdrücklich werdendes) Vorkommen von einer Eigenschaft e in der unendlichen Menge der zu konstruierenden Zahlen oder der mit ihrer Hilfe bestimmbar (möglichen) eentlichen Gegenstände selbst verstanden wird: es "gibt" oder "gibt nicht" eine "Zahl" mit der Eigenschaft e in ihr. Wobei aber immer zu bedenken ist, daß wir hierbei die anschaulich gegebenen "Zahlen" selbst und die zählend bestimmbar Dinge nicht als die von uns zu betrachtenden Gegenstände auffassen: wir denken jetzt nur das sinnhaftlebendige Gesetz der Konstruktion der Zahlen als unsern Gegenstand; nicht aber denken wir an die möglichen Gegenstände, die durch die Zahlen bestimmbar sind und deren Eigenschaften vielleicht noch unter ganz anderen Gesichtspunkten bestimmt werden können als dem, unter dem sie gerade durch Vermittlung der Konstruktionsmethode des Zählens (in dem betreffenden Fall) bestimmt werden; und noch weniger denken wir an die Zahlzeichen (Ziffern), mit Hilfe deren wir die Erlebnisse fixieren, in denen jenes sinnhafte Gesetz erlebend angewandt wird. Jenes

²¹ Strukturanalytischer Terminus. Vgl. "Das Verstehen von Sinn und seine Allgemeingültigkeit" S. 9 ff.

Konstruktionsgesetz selber aber ist – wenn es als Gegenstand betrachtet wird – ganz und gar und ausschließlich bestimmt durch den Sinn der Konstruktion, der in ihm (d.i. in seinem Begriffe) "lebt". Will man diesen Gedanken festhalten bei Betrachtung der Zahlen, so darf man an diesen (und ebenso an den durch sie bestimmbarbaren Gegenständen) nur diejenigen Eigenschaften betrachten, in denen eben jenes Gesetz und nur dieses Ausdruck (und Anwendung) findet, d.h. diejenigen Eigenschaften, die bestimmbar sind nach dem Gesichtspunkt, unter dem die Zahlenreihe als Ausdruck des Sinnes konstruiert ist. So betrachtet, entscheidet dann aber der Sinn jener Konstruktion auch darüber, ob e in der Zahlenreihe vorkommen "muß" oder nicht vorkommen "kann". Ein Drittes zwischen diesem "muß" und "kann" gibt es nicht; seine Annahme hat (unter den soeben angeführten Voraussetzungen) keinen Sinn. Der Gedanke an die Möglichkeit eines solchen Dritten würde ja die hier ausgeschlossene Behauptung enthalten, daß e ohne Rücksicht auf das Gesetz, d.h. daß es "zufällig" in der Reihe "vorkommen" oder nicht vorkommen könne. Das aber würde eben bedeuten, daß die betreffenden Gegenstände, hier also die Zahlen, bestimmbar seien unter irgendwelchen dem Gesichtspunkte des Konstruktionsgesetzes heterogenen Gesichtspunkten. Gerade das aber bleibt hier ausgeschlossen, weil uns ja jetzt die Zahlen gar keine selbständigen "Gegenstände" "sind", die unter den ihnen adäquaten, von ihrem Für-sich-sein her festzulegenden Gesichtspunkten bestimmt "werden", sondern selbst lediglich Ausdrücke "darstellen" für Sinnanwendungen eines Bestimmens, das lediglich seinem eigenen Gesichtspunkt unterliegt.

Diese ausschließliche Alternative "muß" und "kann nicht" gibt jedoch Brouwer nicht zu. Es wirkt in ihm offenbar das uneingestandene Vorurteil nach, daß die besonderen Zahlen (d.i. die ziffernmäßigen Ausdrücke), da sie doch in irgendeinem Sinne "Gegenstände an sich" seien, als solche auch Eigenschaften haben könnten, über die das allgemeine Konstruktionsgesetz der Zahlenreihe nicht (oder doch nicht ausschließlich) entscheidet. Wenn der Begriff des Gegenstandes selbst "absolut" wäre, wenn er "Gegenstände an sich" bedeutete und wenn "die Zahlen" in diesem absoluten Sinne "Gegenstände" wären, so hätte er recht, denn der Sinn des Bestimmens, der in dem Konstruktionsgesetz formuliert wird, bzw. der Gesichtspunkt des Bestimmens, dessen mögliche Bestimmungen nach diesem Gesetze aufgebaut werden, brauchte dann diese Gegenstände nicht unter allen überhaupt auf sie anwendbaren Gesichtspunkten des Bestimmens zu bestimmen. Sind jedoch, wie es meiner Auffassung entspricht, die Zahlen mindestens hier nicht als Gegenstände anzusehen, sondern lediglich als Sinnausdrückende Gebilde und weiter nichts, so kann nichts Eigenschaftliches an ihnen "sein", über das in dem sinnhaften Konstruktionsgesetz nicht bereits entschieden wäre. Natürlich bleibt es auch unter dieser Betrachtungsweise denkbar, daß wir den Zusammenhang zwischen dem Konstruktionsgesetz und gewissen echten, d.i. Sinn-ausdrückenden Eigenschaften einzelner Zahlen nicht einsehen oder beweisen können,^[22] diese "prakti-

²² Zumal wir Sinn als solchen nie "explizit" "haben"; so daß wir sein Sosein unmittelbar an ihm selbst gleichsam ablesen könnten; wir bringen uns das Sosein des Sinnhaften vielmehr immer nur durch die darstellenden Ausdrücke – also mittelbar und nicht an sich selbst – zum Bewußtsein. – Wie wir des Daseins der (eigentlichen) Gegenstände, deren Sosein wir in Begriffen entwerfen, niemals unmittelbar gewiß sind, so können wir umgekehrt das Sosein von Sinn (von dem Sinne des Ich-sagens, d.i. des Erlebens überhaupt und seiner möglichen Besonderungen) immer nur in Symbolen vorstellend "entwerfen" auf Grund des konkreten Lebens, das wir unmittelbar in uns "spüren".

sche" "Unentscheidbarkeit" darf jedoch nicht verwechselt werden mit einer aus dem Sinne folgenden grundsätzlichen.

Ob, um ein Beispiel heranzuziehen, in der Reihe der Dezimalstellen des Ausdrucks für $\sqrt{2}$ oder π eine Sequenz 0123456789 vorkommt, das muß als grundsätzlich festgelegt gelten durch das Gesetz, nach dem diese Dezimalstellen errechenbar sind; wenn es für uns auch keinen Weg gibt, die Frage durch eine logisch-analytische Deduktion aus diesem Gesetz zu beantworten. In dem Gesetz muß nämlich, wie ich vorhin sagte, der Grund dafür enthalten gedacht werden, daß entweder an irgendeiner Stelle diese Sequenz auftreten muß oder daß sie an keiner auftreten kann, ein "zufälliges" Auftreten oder Nichtauftreten läßt es selbst nicht offen. Ob es freilich bei der faktischen Ausrechnung der Stelle je einem Menschen (empirisch) begegnen wird, daß er auf diese Sequenz stößt, das kann "unentscheidbar" sein. Das sinnhafte Gesetz der Berechnung der $\sqrt{2}$ wird nun zwar in der Mathematik ebenfalls wie ein Gegenstand betrachtet, weil (wie erwähnt) nur am gegenständlichen Ausdruck "transzendental" die Bestimmungen der entsprechenden möglichen Gegenstände untersucht werden können; und andererseits sind auch die einzelnen Ereignisse des Berechnens und die etwa hingeschriebenen Zahlreihen ohne Zweifel Gegenstände. Der Dezimalbruch für $\sqrt{2}$ selbst ist aber nur ein Ausdruck für den im Verhältnis zu ihm nichtgegenständlichen "Sinn".^[23] Die Zahlen "sind" also, wie das Beispiel zeigt, nicht diejenigen Gegenstände, die nach dem Gesetz bestimmt würden und die – als diesem Bestimmen gegenüber selbständige Gegenstände – "an sich" auch unter anderen "heterogenen" Bestimmungsmethoden nach anderen Gesichtspunkten als bestimmbar gedacht werden können. Die Zahlen der unendlichen Brüche haben vielmehr keine andere Bedeutung als die: die im erlebenden Bestimmen möglicher Gegenstände sich vollziehende Ausführung jener relativ nicht-gegenständlich-sinnhaften Konstruktion "darzustellen". "Empirische" Eigenschaften, die ihnen unabhängig von den durch das Gesetz selbst vorgeschriebenen zukommen könnten, "haben" sie nicht, d.h. es hat hier keinen Sinn, sie selbst als gegenständliche Träger solcher Bestimmtheiten zu betrachten. Jede "Eigenschaft" also, die an der (hier lediglich als Symbol jenes Sinnes zu betrachtenden) Zahlenreihe auftritt, ist durch das Gesetz gefordert als eine, die ihm zufolge auftreten "muß" und diejenigen Eigenschaften, die nicht an ihr auftreten, "können" dem Gesetz zufolge nicht auftreten. Die Zahlenreihe – obwohl sie (als anwendbarer Ausdruck betrachtet) in unendlichem Werden ist – bildet also für die authentisch mathematische Betrachtung keinen gesonderten Gegenstand im Vergleich zu dem Gesetze selbst, sie "ist" ja (für uns) nur die in der Zeit entstehende Darstellung derselben – und weiter nichts. Und da dieses Gesetz als Gegenstand gefaßt unter dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten steht, steht sie selbst auch darunter.

Das Resultat dieser Untersuchung der sinnhaften Konstruktionen als "Gegenstände" der Mathematik in bezug auf die Brouwerschen Schwierigkeiten ist also dies: der Satz vom ausgeschlossenen Dritten hat für die sinnhaften Konstruktionen volle Geltung, weil in ihnen "Gegenstände" der mathematischen Betrachtung angetroffen werden, und weil die Bestimmung von Gegenständen grundsätzlich durch den Satz vom ausgeschlossenen Dritten in adäquater Weise geregelt wird. Brouwer ist daher im Irrtum, wenn er als un-

²³ Der gegenständliche Ausdruck im Symbol darf mit dem Sinn, den er ausdrückt, ebensowenig verwechselt werden wie die durch ihn zu bestimmenden möglichen eigentlichen Gegenstände (z.B. das Verhältnis der Kathete zur Hypotenuse, das irgendwo wirklich vorkommen kann) mit dem Sinn verwechselt werden dürfen.

statthaft erklärt zu sagen: wenn von der Eigenschaft e bisher noch nicht erwiesen ist, daß sie in der unendlich werdenden Reihe aufgetreten ist oder auftreten muß und wir andererseits nicht mit logischen Gründen ausschließen können, daß sie irgendwo in ihr auftreten kann, so "gebe" es immer noch ein "Drittes", d.h. ein gleichsam zufälliges oder empirisches Auftreten oder NichtAuftreten. Wenn e "faktisch" auftritt, "muß" es auftreten und wenn es in der "ganzen Reihe" niemals auftritt oder auftreten "wird", so konnte es nicht auftreten. Dieses "muß" oder "kann nicht" wird Symbolen gegenüber durch den Sinn festgelegt, dessen Symbole sie sind.

b) *Betrachtung der transzendental zu bestimmenden "eigentlichen" Gegenstände.*

Wir haben die Zuständigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten bisher geprüft für die sinnhaften Konstruktionsgesetze, insofern diese als – wenn auch nur uneigentliche – Gegenstände betrachtet werden konnten. Es ergab sich uns, daß man diese Sinngebilde sorgfältig unterscheiden muß von den in der eigenen Seele (innerlich) wahrnehmbaren seelischen Ereignissen, denen wir diesen Sinn erlebend "einlegen", und ebenso von den anschaulich-gegenständlichen "Ausdrücken" (Zahlzeichen und anderen Symbolen), in denen wir uns das Sosein des betreffenden Sinnes vorstellig und festhaltbar machen. Trägt man dieser Unterscheidung Rechnung und betrachtet man dementsprechend diese Seelenereignisse oder Symbole nur insoweit, als die an ihnen feststellbaren Eigenschaften eben Ausdruck jenes Sinnes sind, d.h. unter Absehen von allen Eigenschaften, die ihnen von dieser Ausdrucksfunktion abgesehen noch anhaften können, so zeigte sich, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten uneingeschränkt angewandt werden kann.

Wir wenden uns nun den "eigentlichen" Gegenständen zu als der zweiten Art von Gegenständen, die entsprechend unseren obigen Ausführungen für die Mathematik von Bedeutung sind. Eigentliche Gegenstände kommen für die Mathematik insofern in Betracht, als Mathematik sich nicht (wie die Philosophie) mit dem reinen Sinn als solchen (oder mit dem Sinn der Sinnhaftigkeit selber) beschäftigt, sondern Sinngebilde nur in ihrer Bedeutung als Bestimmungen möglicher Gegenstände erforscht. "Mögliche Gegenstände" bedeuten nun zwar als solche noch keine eigentlichen Gegenstände, sondern Ausdrücklichmachungen erlebend gespürten Sinnes, hier aber handelt es sich um diesen Sinn gerade als Bestimmung spezifisch eigentlicher Gegenstände, d.i. um die Erlebensemöglichkeit, um die Denkbare von Gegenständen im eigentlichen Sinne der Gegenständlichkeit. D.h. von solchen Gegenständen, die "als" dem Ich und seinem sinnhaften Erleben gegenüber für-sich-seiend gedacht werden können. Der Sinn, der in den hier in Frage kommenden Möglichkeitsvorstellungen ausdrücklich wird, ist ein Sinn, zu dessen Sinngehalt es gerade gehört, (mögliche) Bestimmung eigentlicher Gegenstände zu sein: die Möglichkeitsvorstellungen haben also hier nicht nur die Funktion, irgendwelchen Sinn darstellbar zu machen, sondern solchen, dem als spezifische Eigenschaft zukommt, Gegenstände, d.i. (als solche zu denkende) eigentliche Gegenstände zu bedeuten. Liegt doch der Sinn des mathematischen Bestimmens gerade darin, daß durch die Sinnbetrachtung und in ihr über (als solche zu denkende) Gegenstände allgemeine Aussagen gemacht werden können. Mag also dabei auch die Frage außer Betracht bleiben, ob die so gedachten Gegenstände jenseits und

unabhängig von den sie denkenden Gedanken^[24] "wirklich" "sind" (ja ob sie nach empirischen Gesetzen auch nur wirklich sein "können",^[25] die Bezugnahme auf die Möglichkeit dieser Gegenstände, die in dem sie denkenden Gedanken selber liegt, ist eine Bezugnahme auf mögliche "eigentliche" Gegenstände. In dieser Weise gehört es zu dem besonderen Sinne des Mathematischen, daß die möglichen Gegenstände, als deren Bestimmung mathematische Überlegungen ihren eigentlichen Sinn haben, den bisher von uns betrachteten uneigentlichen, rein sinnhaften Gegenständen jedesmal als eigentliche gegenüberstehen. Wir sind stets berechtigt, sie als eigentliche Gegenstände (zum mindesten in fingierender Überlegung) aufzufassen: d.h. als Gegenstände irgendeiner als solche zu denkenden "Wirklichkeit".

Stellen wir nun gegenüber diesen eigentlichen Gegenständen, auf die sich die Mathematik nur mittelbar, transzendental, aber in einer für ihren Sinn wesentlichen und unabstreifbaren Weise bezieht, die Frage nach der Zuständigkeit unseres Drittsatzes, so kann die Antwort nicht zweifelhaft sein. Insofern wir irgendwelche Gegenstände als eigentliche und damit als wirkliche denken, denken wir sie auch als erlebend bestimmbar. Und wenn wir auch faktisch nicht in der Lage sein sollten, sie adäquat bestimmen zu können, ja wenn wir sogar (wie es m.E. zuletzt geboten ist) eine völlig adäquate Bestimmung überall als ein unerreichbares Ideal ansehen, dem wir uns faktisch nur ohne Ende zu nähern suchen können, so halten wir doch diesen Gedanken ihrer adäquaten Bestimmtheit zum mindesten als "Grenzbegriff" aufrecht. So viel an ihnen selbst liegt, denken wir sie als so beschaffen, daß sie ein adäquates Bestimmen zulassen, mag auch jedes faktische Erleben der Aufgabe dieses adäquaten Bestimmens gegenüber mehr oder weniger – und vielleicht sogar mit apriorischer Notwendigkeit – versagen.

Alles adäquate Bestimmen aber, mag es faktisch erreichbar sein oder nicht, muß als ein Bestimmen gedacht werden, das dem Satze des ausgeschlossenen Dritten untersteht. So ergibt auch die Betrachtung dieser eigentlichen Gegenstände, auf die die Mathematik mittelbar Bezug nimmt, wenn man sie isoliert ins Auge faßt, keine Möglichkeit, die Brouwersche Ausschaltung des Drittsatzes verständlich zu machen.

Die gesonderte Untersuchung der beiden von uns unterschiedenen Gegenstandsarten: sowohl die der sinnhaften Konstruktionen wie die der durch sie mittelbar zu bestimmenden eigentlichen Gegenstände führt uns also zu dem gleichen negativen Ergebnis bezüglich des Brouwerschen Verbotes.

c) *Das transzendente Bestimmen des eigentlichen Gegenstandes durch den konstruierbaren Sinn im Falle approximierender Konstruktionen.*

Aber dennoch hat nun das Brouwersche Verbot der Anwendung des tertium non datur seinen guten Sinn und seine tiefe Berechtigung. Diese zeigt sich, wenn wir nun die beiden von uns unterschiedenen Gegenstandsarten nicht mehr gesondert betrachten, sondern auf das Verhältnis achten, in dem sie in der Mathematik zueinander stehen. Wir haben oben dargelegt, daß das mathematische Bestimmen sich nach dem transzendentalen Prinzip vollzieht, d.h. daß durch jene sinnhaften Konstruktionen diese eigentlichen Gegenstände, wenn auch als nur "mögliche" Gegenstände (einer denkbaren Welt)

²⁴ Die in dieser Erwägung ihrerseits wieder als Gegenstände betrachtet: zu psychischen Ereignissen (in der Welt) "vergegenständlicht" werden.

²⁵ Der Begriff des "Könnens" nimmt hier eine andere, relativ objektivere Bedeutung an, als er ihn im Begriff der "reinen Möglichkeit" hat.

mittelbar bestimmt werden. Das transzendente Prinzip besagt genauer, daß die Bestimmungen der Konstruktionen zugleich Bestimmungen der durch diese bestimmbaren möglichen Gegenstände sind, daß also die Bestimmungen, die wir über diese Konstruktionen treffen, sich gleichsam übertragen auf die durch sie bestimmbaren Gegenstände resp. Gegenstandsmomente.^[26] In diesem in dem transzendentalen Prinzip gegebenen Übertragungsverhältnis zwischen den sinnhaften Konstruktionen und den durch sie bestimmbaren Gegenständen liegt nun sozusagen die wunde Stelle, um derentwillen das Verbot der Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten einen berechtigten Sinn hat. Denn hier ist es, wo in das adäquate mathematische Bestimmen ein Zug von Inadäquatheit, ja von grundsätzlicher Inadäquatheit einbezogen werden kann; und wie wir zu zeigen versucht haben, ist es im Sinne des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten gelegen, nur unter Gesichtspunkten anwendbar zu sein, die den zu bestimmenden Gegenständen adäquat sind. Diese aus dem transzendentalen Prinzip sich ableitende mögliche Inadäquatheit des mathematischen Bestimmens muß also zunächst näher untersucht werden.

Völlig adäquates Bestimmen eines Gegenstandes würde voraussetzen, daß das zu denkende Für-sich-sein des Gegenstandes den Konstruktionsmitteln des erlebenden Bestimmens durchaus konform sei. Im Fortschritt der wissenschaftlichen Entwicklung haben wir jedoch gelernt, unser Bestimmen der (wirklichen) Gegenstände nur als steigende Annäherung an das zu denkende Für-sich-sein zu deuten und uns mit diesem Sinne des Bestimmens zu begnügen. Im Zusammenhang hiermit hat die Mathematik ihre Methoden approximativer Bestimmung ausgebildet, in denen der Gegenstand als bestimmt gilt, wenn wir ihn vermöge eines Gesetzes annäherungsweise bis zu jedem gewünschten Grade der Genauigkeit zu bestimmen vermögen, mag auch völlige Deckung des bestimmenden Sinnerlebens mit dem Gegenstande unerreichbar bleiben. Und es erscheint mir richtig, dieses approximative Bestimmen als die allgemeine Regel, die Fälle adäquaten Bestimmens dagegen als Spezialfall oder sogar lediglich als eine methodische Vereinfachung aufzufassen.^[27]

Im Sinne der Approximation liegt nun aber, daß der Gegenstand durch keinen selbst gegenständlich erfaßbaren Inbegriff von gedanklichen Gliedern der aufzustellenden Annäherungsreihe in vollendeter Weise bestimmt wird: es gehört vielmehr wesentlich zu der in jenem Sinne getroffenen Bestimmung (des Gegenstandes), daß jeder (der Vergegenständlichung zugängliche) Gedanke der festgelegten Art nach einem gewissen Gesetze überboten werden kann. Es gilt deshalb hier nicht ohne weiteres der Satz, daß die Bestimmungen, die den bestimmenden Gedanken, d.i. den sie ausdrücklich machenden Gegenständen, zugeschrieben werden, sich auf den durch die Gedanken zu bestimmenden Gegenstand übertragen müßten. Denn im Ausdruck vergegenständlicht werden kann hier – und kann bei solcher approximativen Bestimmung sogar grundsätzlich – nie die "ganze" rein sinnhafte Konstruktionsreihe, sondern immer nur ein "Teil" derselben, und wenn wir einen solchen Teil betrachten, so bleibt immer noch die Möglichkeit, daß in dem die gegenständlich ausgedrückten Gedankenschritte

²⁶ In diesem Gedanken liegt natürlich auch: wenn es "seiende" (d.i. im eigentlichsten Sinne eigentliche) Gegenstände "gibt", die durch den in der Möglichkeitsvorstellung ausgedrückten Sinn bestimmt werden, so werden auch diese seienden, Gegenstände durch jene aus dem Sinne folgenden Bestimmungen getroffen. Man kann deshalb das transzendente Prinzip auch in der Form des Satzes aussprechen: "was wirklich (seiend) sein soll, muß möglich sein."

²⁷ Vgl. unten § V und Anhang II.

überbietenden, selbst (noch) nicht vergegenständlichten, aber vom Sinne der Regel bereits geforderten "Rest" der Reihe Beschaffenheiten des Gesetzes zum Ausdruck kommen können, die in dem vorliegenden Teile, der bereits gegenständlich symbolisiert ist, noch keinen Ausdruck fanden. Stellt sich nun in dem Gesetz des Aufbaues der Reihe eine gewisse Eigenschaft dar der Gedanken, die in dem symbolischen Ausdruck sukzessiv zur Darstellung kommen, so überträgt sich diese zwar auf den durch die Reihe transzendental zu bestimmenden Gegenstand in demselben approximativen Sinne und Maße nämlich, in dem die Reihe den Gegenstand überhaupt bestimmt. Soweit jedoch die die Gedanken ausdrückenden Gegenstände Eigenschaften nicht aufweisen, "noch nicht" aufweisen, die dennoch grundsätzlich aus jenem Gesetze ableitbar sind (oder sein würden), muß auch durch diese nicht-ausgedrückten Eigenschaften der Gegenstand getroffen werden. Nun wird die Behauptung, daß alle Glieder solcher Reihen eine gewisse positive Eigenschaft haben, wohl stets nur aus der Kenntnis der Gesetze gefolgert werden können. In diesem Falle hat dann auch der durch die Reihe approximativ zu bestimmende Gegenstand die entsprechende Eigenschaft. Und nach dem Satze des Widerspruches hat er und haben ebenso die Glieder der Reihe die kontradiktorische Eigenschaft nicht. Das Entsprechende gilt, wenn aus dem Gesetze hervorgeht, daß die Glieder der Reihe eine gewisse Eigenschaft nicht haben können. Soweit aber unabhängig von dem Gesetze, "empirisch" festgestellt wird, daß in irgendeinem Inbegriff von Reihengliedern ein oder mehrere Glieder mit einer bestimmten Eigenschaft vorkommen oder nicht vorkommen, so würde hieraus weder für das Gesetz noch für den zu bestimmenden Gegenstand Zwingendes folgen. Denn besonders das Fehlen in dem als Gegenstand dargestellten Teil der Reihe präjudiziert nichts über das Gesetz, das ja erst in dem (unmöglichen) Inbegriff aller möglichen Glieder der Reihe adäquate Darstellung finden würde, und somit präjudiziert es auch nichts über den zu bestimmenden Gegenstand; denn gerade zu dem Sinn des Bestimmenseins dieses letzteren durch die Reihe gehört ja auch dies: daß über jede mögliche Darstellung in einem (ausdrückenden) Gegenstand hinaus die Reihe noch einen von dem Gesetz geforderten "Rest" aufweist. Es bleibt dementsprechend ständig noch eine unendliche Lücke offen zwischen jeder darstellenden Reihe und dem durch sie (d.i. durch das in ihr "unzulänglich" symbolisierte sinnhafte Gesetz) approximativ zu bestimmenden Gegenstand (dem "Limes" der Reihe). Diese stets verbleibende Lücke aber ist selbst der Ausdruck der Inadäquatheit der bestimmenden Konstruktionsmethode zu dem durch sie zu bestimmenden Gegenstand, oder was dasselbe sagt: der Ausdruck der Heterogenität des Gesichtspunktes der Bestimmung zu dem Gegenstande. Und um dieser Inadäquatheit willen ist nun hier der Satz des ausgeschlossenen Dritten in der Tat nicht mehr "anwendbar".

Unser Ergebnis bezüglich approximativer Bestimmungen wäre demnach folgendes.

Wenn sich in der betreffenden Zahlenreihe eine Eigenschaft e findet, so dürfen wir (wenn auch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit^[28]) annehmen, daß das Gesetz sie verlangt. Und soweit nach diesem Gesetz der Gegenstand überhaupt bestimmbar ist (eben in den Grenzen, die durch den Approximationscharakter gezogen sind), dürfen wir annehmen, daß die der Eigenschaft e entsprechende Eigenschaft des Gesetzes etwas austrägt für den zu bestimmenden Gegenstand. Wenn sich die Eigenschaft e nicht findet

²⁸ Genauer gesagt: unter der Voraussetzung, daß die positiv an der Reihe feststellbaren Eigenschaften der Symbole selbst adäquate Ausdruckszüge des Sinn-Gesetzes sind – und nicht etwa nur Eigenschaften, die den verwendeten Symbolen anhaften, ohne von dem Sinne verlangt zu sein.

und wir nicht etwa aus dem Gesetz folgern können, daß sie nicht auftreten kann, so ergibt sich für uns gar nichts. Das Gesetz selbst können wir natürlich unter jede alternative Frage stellen, deren Gesichtspunkt seinem eigenen Sinne adäquat ist. Es unter Fragen zu stellen, von denen wir nicht wissen, ob ihr Gesichtspunkt mit dem Gesichtspunkt vereinbar ist, nach dem das Gesetz selbst konstruierend seinen Gegenstand bestimmt, ist sinnlos, zumal das Gesetz ja selbst kein eigentlicher Gegenstand ist. Betrachten wir das Gesetz oder (als Vertreter desselben) die es ausdrückende Reihe dennoch als Gegenstand, der als solcher unter jede denkbare Alternative des Bestimmens überhaupt gestellt werden kann, so müssen wir uns klar machen, daß wir mit dieser Betrachtung nichts mehr gewinnen für die transzendental mittelbare Bestimmung desjenigen Gegenstandes; auf dessen Bestimmbarkeit es eigentlich ankommt. Denn das Gesetz und die es darstellende Reihe kommt in dieser seiner mathematisch relevanten Funktion ja gerade nicht als seiender Gegenstand in Betracht, sondern nur in seinen den Sinn seines Bestimmens ausdrückenden Eigenschaften. – An das entscheidende Problem kommen wir aber erst heran, wenn wir darauf eingehen, daß ja der Sinn dieses Bestimmens selber durch den Satz des ausgeschlossenen Dritten geregelt wird: der Sinn bestimmt seinen Gegenstand, indem er ihm unter der strengen Alternative dieses Satzes Eigenschaften zu- und abspricht. Für unsere Fälle aber ist gerade die diesem Sinn des Bestimmens überhaupt gegenüber beinahe paradoxe Sachlage bezeichnend, daß hier der Sinn dieses Bestimmens nicht (voll) erfüllt wird, weil ja der Gesichtspunkt, unter dem bestimmt wird, heterogen ist zu dem (uns nicht bekannten und vielleicht sogar grundsätzlich unerlebbaren) Gesichtspunkt, unter dem der zu bestimmende Gegenstand ganz adäquat bestimmbar sein würde.

Jede positive Bestimmung durch das Gesetz hat demnach wohl ihren approximativen Wert und schließt im gleichen Sinne ihr kontradiktorisches Gegenteil aus. Es kann aber zunächst jedem als Gegenstand betrachteten Ausdruck gegenüber Alternativen geben, deren Entscheidung den auszudrückenden Sinn nicht berührt, weil der Gesichtspunkt der alternativen Frage wohl dem Symbol (als Gegenstand) adäquat ist, aber nicht dem bestimmendem Sinn und darum auch nicht dem als Symbol des Sinnes betrachteten Ausdruck. Und im Falle approximativen Bestimmens kann es hierüber hinaus noch Fragen geben, die sich sogar von dem Gesichtspunkt des approximativ bestimmenden Sinnes aus wohl stellen lassen, deren Anwendung jedoch auf den Gegenstand, auf dessen Bestimmbarkeit zuletzt alles ankommt, durchaus sinnlos sein würde, weil sie infolge der nur approximierenden Adäquatheit dieses Gesichtspunktes sich nicht auf den Gegenstand anwenden lassen, sondern gleichsam in die Lücke fallen, die zwischen approximierender und adäquater Bestimmung offen bleibt. In beiden Fällen sind die Fragen dem zu bestimmenden (eigentlichen) Gegenstande gegenüber in derselben Weise sinnlos wie die oben betrachtete Frage: ist Weihnachten blau oder andersfarbig? Hierin also liegt die Einschränkung, die die Anwendbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten erfährt.

Wie das, was ich zuletzt in der Heranziehung des Beispiels "Weihnachten" (für den zweiten der soeben unterschiedenen Fälle) verdeutlichen wollte, zutrifft auf die Brouwersche Schwierigkeit, läßt sich folgendermaßen klarmachen.

In dem Beispiel "Weihnachten ist nicht-blau" würde eine sinnvolle Bestimmung getroffen sein, wenn man, anstatt die Alternative blau – nicht-blau auf die Farben zu beziehen, ein System "möglicher Bestimmungen überhaupt" als dem Gegenstande adäquat annimmt, so daß dann unter nicht-blau der Inbegriff der Bestimmungen zusammengefaßt wäre, der in diesem System neben blau möglich sein würde. In analoger Weise

würden wir bei Betrachtung der Frage: kommt in den Dezimalstellen von π die Sequenz 12345... vor "oder nicht"? zunächst anstatt auf "unseren" unendlichen Dezimalbruch uns zu beziehen haben auf die uns unbekannt konstruktionsmethode, in der das gegenständliche Verhältnis π adäquat bestimmbar sein würde. Dann aber würde der Sinn jenes "oder nicht" keineswegs gleichzusetzen sein mit dem Inbegriff anderer eindimensionaler (linearer) Ziffernfolgen von anderer als der angegebenen Art. Vielmehr könnte ja die Forderung adäquaten Bestimmens uns nötigen, linear darstellbare Ziffernreihen überhaupt nicht mehr anzuwenden, sondern z.B. mehrdimensional (und vielleicht noch in komplizierteren Verzweigungen) sich anordnende Ziffernhaufen, oder sogar auf ziffernmäßige Darstellbarkeit gänzlich zu verzichten. So betrachtet würde für diese ideal geforderte Konstruktion der Satz vom ausgeschlossenen Dritten wieder gelten. Aber das, was Brouwer bestreitet, ist demungeachtet gerechtfertigt. Denn in dem Gedanken: "Auftreten oder Nicht-Auftreten" jener "Sequenz" hat wohl niemand die soeben angegebene Bedeutung mit dem Begriffe des Nicht-Auftretens (als den positiven Sinn desselben) bisher verbinden wollen.

d) *Erweiterung unserer Betrachtungen auf die Bestimmung "unendlicher Bereiche" überhaupt.*

Wie in dieser Weise die Inadäquatheit des nach dem transzendentalen Prinzip sich vollziehenden konstruierenden Bestimmens und damit die Nichtanwendbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten deutlich wird für approximative Bestimmungsmethoden, so läßt sie sich nun auch deutlich machen innerhalb aller unendlichen mathematischen Bereiche überhaupt: Und damit für das ganze Gebiet, angesichts dessen Brouwer sich veranlaßt gesehen hat, die Anwendung dieses Axioms zu verbieten.

Denken wir uns die Reihe der Zahlen als bestimmende Konstruktion, so kann es überhaupt keinen Gegenstand "geben", der durch sie adäquat bestimmbar sein würde. Denn zum Sinn der Gegenständlichkeit gehört, daß der Gegenstand als endlich gedacht wird.

Prüfen wir z.B. die Aufgabe, die Menge der wirklichen Dinge als abzählbar unendlich zu denken. Es ist richtig, daß sie als abzählbar gedacht werden muß, weil ja Zählen den Setzungsakt der Gegenstände im Erleben ausdrückt. Sie unendlich zu denken würde dagegen bedeuten, sie dem (besonderen) Gesichtspunkt der (betreffenden) Abzählung grundsätzlich als inadäquat zu denken. In der Tat muß die Menge des als wirklich Erlebbar stets endlich gedacht werden, wenn auch vielleicht über jedes angebbare Maß hinausliegend. Das als wirklich Gedachte wird jedesmal notwendig^[29] gedacht als ein geschlossenes Ganzes um das selbst als wirklich hingennommene Ich herum. Die Menge aber der als erlebensmöglich denkbaren Schritte setzenden Bestimmens von Gegenständen (in denen diese anscheinend^[30] noch nicht als wirklich gedacht werden, sondern nur als möglich) ist unendlich; und zwar gerade deswegen, weil das Zählen als eine inadäquate Methode der bestimmenden Konstruktion dieses "Gegenstandes" (nämlich jener Menge) erkannt werden muß. Sie ist – wie hier nicht

²⁹ Nämlich a priori notwendig aus dem Sinn des urphänomenalen Begriffes der Gegenständlichkeit; oder wenn man sich vorsichtiger ausdrücken will: der wirklichen Gegenstände (gegenständlicher Wirklichkeit). Der Begriff der möglichen Gegenstände bedeutet diesem Begriff gegenüber nur eine uneigentliche, transzendental-mittelbare Bestimmung derselben Gegenstände: nämlich die als (wirkliche) Gegenstände erlebensmöglichen Gegenstände.

³⁰ Vgl. die vorangehende Fußnote.

ausgeführt werden kann – inadäquat wegen der Iterationen des sich-selbst-erlebenden Erlebens.^[31] Diese nämlich überbieten jeden Inbegriff einer Wirklichkeit durch die Erlebensmöglichkeit, das sie erlebende Erleben selbst zum Gegenstand dieser Wirklichkeit zu machen und zugleich ein neues Erleben aufspringen zu lassen, das weiterhin dann wieder ebenfalls als Gegenstand in jene Wirklichkeit einbezogen werden kann. Und man kann nicht einmal sagen, daß die auf jeder dieser Stufen gedachte Wirklichkeit bei diesem Standpunktwechsel jedesmal nur um "einen" Gegenstand vermehrt wurde. Denn, wenn man auch Gedanken als wirkliche Gegenstände betrachtet, tritt in jeder Iteration zu der Summe der bereits wirklichen Gegenstände jeder einzelne der Gedanken hinzu, in denen auf der vorangegangenen Stufe die Summe der Gegenstände der betreffenden Wirklichkeit gedacht worden war. Diese Iteration nach der Subjektseite ist der Grund des Unendlichkeitsgedankens der "Welt", während die (ohne Berücksichtigung der möglichen Standpunktverschiebungen) nur von irgendeiner Schicht des Erlebens aus gegenständlich gedachte "Wirklichkeit" stets endlich gedacht ist und nur unter der Frage steht: wie groß? oder wieviele Dinge?, zu deren Beantwortung grundsätzlich Erfahrung und denkende Verarbeitung derselben heranzuziehen wäre. Diese subjektive Iterierbarkeit ist denn auch der Grund der Unmöglichkeit, das "Ganze" der gegenständlichen "Welt überhaupt" in einem adäquaten Begriff zu denken. Diese Unmöglichkeit wieder ist es, die jede angebbare Zahl als inadäquat erscheinen läßt gegenüber dem Inbegriff des als wirklich überhaupt Erlebbaren, und die dadurch nötigt, die Anwendung der Zahl überhaupt (in der Bestimmung jenes Wirklichen überhaupt) als unendlich zu denken. (Vgl. auch den weiter unten erwähnten Unendlichkeitsbeweis Dedekinds, der auf dieser subjektiven Iterierbarkeit aufgebaut ist.)

Auch hier ist also die Unendlichkeit der sinnhaften Konstruktion Ausdruck der Inadäquatheit des bestimmenden Gesichtspunktes zu dem zu bestimmenden Gegenstand. – Damit wird aber einsichtig, weshalb die Bedenken, die gegen den Satz vom ausgeschlossenen Dritten gegenüber approximativ unendlichen Bestimmungen bestehen, hier erst recht am Platze sind. Das heißt, daß dieses Axiom nicht nur für approximative Bestimmungen, sondern für alle sogenannten "unendlichen Bereiche" ausgeschlossen bleibt. —

V. Die allgemein logische Bedeutung des Verbotes des Dritzensatzes. Der Sinn des Unendlichkeitsgedankens und die Mathematik.

Wenn Brouwer nicht nur für unendliche Bereiche der Mathematik, wie etwa die Menge der natürlichen Zahlen oder die Dezimalstellen von π oder $\sqrt{2}$ u.a.m. den Satz des ausgeschlossenen Dritten anzuwenden verbietet, sondern diesen Satz aus der Logik überhaupt verbannen will, so kann man diese Ausdehnung seines Einspruches nur so verstehen, daß alles bestimmende Erkennen von Gegenständen seinem Sinne gemäß als inadäquat und unendlich, und im günstigsten Falle als nur approximierend gedacht werden müsse, und daß daher die Unendlichkeit jener mathematischen Bereiche keine nur diesen Bereichen zukommende Eigenschaft bedeute, sondern allgemein auf das Verhältnis gehe, das zwischen Gesetzen des sinnhaften Konstruierens und dem Gege-

³¹ Ich verweise auf die Entwicklung dieser standpunkt-verschiebenden Iterationen in "Das Verstehen" I, zu den im Text folgenden Ausführungen auf m. Besprechung von Heideggers: Was ist Metaphysik? Dtsche Lit.-Ztg. 1930, Heft 23 Sp. 1065 f.

nstände besteht; daß alle diese Gesetze also ihre Gegenstände transzendental und nur in Methoden der Annäherung bestimmen. Dies aber kann man, wie mir scheint, aus folgenden Gründe mit Recht behaupten. Alle Gegenstände sind ihrem Sinne nach besondere, einzelne Gegenstände.^[32] Bestimmungen einzelner Gegenstände aber sind a posteriori. Apriori wird lediglich der nichtgegenständliche Sinn (und aus diesem "transzendental" "mögliche" Gegenstände) bestimmt. Die Mathematik bestimmt also a priori den Sinn der Konstruktionsmethoden möglichen aposteriorischen Bestimmens. Nun ist alles aposteriorische Bestimmen von Gegenständen, die als solche dem Begriff und dem Erleben von Sinn "transzendent" sind, ein grundsätzlich unendliches Verfahren der Annäherung an die "Wahrheit". Dies, wie wir soeben ausführten, nicht deshalb, weil das Gegenständliche selbst als solches unendlich "wäre"; Unendlichkeit bedeutet vielmehr auf Gegenstände angewandt lediglich einen Ausdruck für ihre Unbestimmbarkeit gegenüber einem bestimmten Gesichtspunkt; so ist etwa die "Welt" in Raum und Zeit darum unendlich, weil sie in ihnen nicht (anschaulich) bestimmt darstellbar ist, jeder möglichen räumlichen und zeitlichen Bestimmung gegenüber "indefinit" bleibt – was dagegen wahrhaft und im eigentlichsten Sinne unendlich ist, das ist das "Nichtgegenständliche" als solches: der Sinn, das Ich, das Erleben, das sich in iterativer Identifizierung mit sich selbst als "innerlich unendlich" erlebt, sobald es sich (wie es gemäß dem spezifischen Sinne Erleben, Ich, Bewußtsein u.s.w. muß) eben nicht nur als Erlebtes, sondern zugleich auch als Erlebendes betrachtet;^[33] darum gilt das, was wir für die sinnhaften Konstruktionen in der Mathematik ausgeführt haben, grundsätzlich für alle die Begriffe, durch die überhaupt mögliche Gegenstände bestimmt werden. Wie man aber bisher meist irrigerweise geglaubt hat und glaubt, die mathematischen Gebilde als Gegenstände^[34] ansprechen zu müssen – zwar als "ideale" im Gegensatz zu den realen der Welt, ohne sich jedoch darüber klar zu sein, was diese Unterscheidung bedeute – so nahm man auch an dem Begriff der "Unendlichkeit" von Gegenständen keinen Anstoß.^[35]

In Verfolgung derselben Denkweise, die in Husserls Phänomenologie einen bedeutenden Ausdruck gefunden hat, meint man neuerdings der möglichen Unendlichkeit von Gegenständen die Endlichkeit des erlebend-denkenden Geistes (des Menschen) gegenüber stellen zu müssen, wodurch der Sinn dieses Verhältnisses geradezu auf den Kopf gestellt wird. Nicht das Denken ist endlich, sondern nur der "Mensch", wenn er selbst "ohne Rest" als Gegenstand und als seiend gefaßt wird, - in welcher Auffassung aber eine unerlaubte Einseitigkeit liegt – und das ebenso mißverständene Ich ist endlich: sie sind endlich wie die Gegenstände, in deren Bereich sie auf diese Weise restlos

³² Vgl. Metaphysik ... § 9.

³³ Hierzu Das Verstehen von Sinn .. § 5ff. und Metaphysik ... bes. § 17 f.

³⁴ Genauer als "eigentliche" Gegenstände irgendwelcher Art (so z. B. Plato), anstatt sie richtig zu verstehen als symbolische Ausdrucksgebilde von nicht – oder doch nichteigentlich – gegenständlichem Sinne.

³⁵ Der berühmte Beweis von Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen?*, Brschw. 1923, 5. Aufl. S. 17f.) für die Zulässigkeit unendlicher Gegenstände arbeitet charakteristischerweise mit der Vergegenständlichung von "Gedanken". Gedanken aber sind Gedanken nur, insofern sie Vergegenständlichungen von Sinn sind, und Sinn ist Sinn als dasjenige, was nie ohne Rest vergegenständlicht werden kann. Der Beweis nimmt in dieser verstellten Form mit Recht Bezug auf die Unendlichkeit des Sinnes, auf die "innere Unendlichkeit" des "Erlebens", er darf aber nicht mißverstanden werden als Beweis für die Denkbarkeit "unendlicher Gegenstände". Vgl. auch den Anhang III.

einbezogen werden. Es gibt aber, d.h. es muß als selbst sinnvoller Begriff auch angenommen werden, ein "nichtgegenständliches" Erleben oder Ich-Sagen-können; und das ist der Punkt, an dem diese letztlich empiristisch oder platonisch-objektivistisch orientierte Betrachtungsweise versagt.[³⁶]

Dieser grundsätzliche Irrtum über das Wesen der mathematischen "Gegenständlichkeit" – der wiederum darin zutiefst begründet ist, daß der Sinn des Sinnes-überhaupt, nicht verstanden worden ist – ist aber, wie aufgezeigt worden ist, der letzte Grund für die Verwirrung, die die Brouwersche Behauptung über den Satz des ausgeschlossenen Dritten hervorgerufen hat. Man hat nicht unterschieden zwischen den sinnhaften, und damit mindestens in relativem Sinne nichtgegenständlichen, Konstruktionsgesetzen und den möglichen Gegenständen, die durch diese Gesetze bestimmbar sind und drittens den ("psychologisch") gegenständlichen Erlebnissen (seelischen Ereignissen) oder auch den an diese geknüpften Symbolen, in welchen die sinnhaften Gesetze erlebend ausdrücklich werden. Die Alternative "In der Reihe der natürlichen Zahlen muß es eine Zahl mit der Eigenschaft E geben oder es kann eine solche Zahl nicht geben" besteht nur da, wo die nach dem Konstruktionsgesetz zu entwickelnden gegenständlichen Erlebnisse durch nichts anderes bestimmt gedacht werden als durch den reinen Sinn des Gesetzes: Sobald man aber zugibt, daß neben diesem reinen Sinn noch irgendeine andere Instanz in die Gestaltung dieser ausdrückenden Erlebnisse eingreift, würde diese Alternative nicht mehr lückenlos sein. Praktisch muß dieses Zugeständnis stets gemacht werden.

Es mag dies an dem Beispiel der Zahl einsichtig werden. Die Auffassung der Zahlen als reine Sinngebilde ist ein grenzbegriffliches Ideal. Denn wie bei den rein sinnhaften Momenten des Bestimmens möglicher Gegenstände überhaupt spielen auch in jeder von Menschen geschaffenen Mathematik spezifisch anthropologische Momente eine Rolle. In welcher Weise unsere Auffassung der Zahl von solchen Momenten, wie etwa Raum- und Zeitanschauung als Bedingung möglicher Gegenstandsvorstellung, bestimmt ist, läßt sich natürlich nicht entscheiden. Es läßt sich nur allgemein sagen, daß diese anthropologischen Momente nicht den zu "spürenden" reinen Sinn als solchen mitbedingen, wohl aber die vorstellig-darstellende Ausdrücklichmachung desselben, auf die wir zur Festlegung und damit zur Klärung des Soseins des Sinnes angewiesen sind. Jedenfalls wird aber faktisch schon durch unsere eigene anthropologische Konstitution neben der "Idee" der Zahl jene andere mitbestimmende Instanz in die Konzeption der natürlichen Zahlen eingeführt, so daß wir in keiner praktischen Mathematik mit "reinen" Zahlen zu tun haben, obwohl in der mathematischen Wissenschaft das Bedürfnis, jene mitbestimmenden anthropologischen Instanzen fortschreitend auszuschalten, besonders seit Einführung der Infinitesimalrechnung und der Funktionentheorie stark hervortritt. An dieser Stelle liegt vor allem auch die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie und der mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie, die diese anthropologische Anschauung (in der Kant noch glaubte, die eigentlich mathematischen Begriffe konstruieren zu müssen), aus der Raum- und Zeitkonstruktion ausschalten. Es darf dabei nicht vergessen werden, daß auch diese anthropologischen Momente ein relatives "A priori" bedeuten insofern, als sie zwar nicht folgen aus dem reinen (subjektiven, "erlebenden") Sinn des Erlebens überhaupt und der erlebbaren Gegenständlichkeit, wohl aber aus dem Sinn des spezifisch (objektiv-erlebten) menschlichen Erlebens von Gegenständen. Diesen Unterschied kennt auch Kant: seine Kategorien, welche den Begriff der Gegenständlichkeit festlegen, sollen gelten für "jedes vernünftige Wesen" überhaupt; die An-

³⁶ Vgl. Metaphysik ... III.

schauungsformen der transzendentalen Aesthetik dagegen nur für den Menschen. Wenn wir nun auch Kants unflüssige Abgrenzung von Anschauen und Denken aufgeben und vor allem auch seine Zusammensetzung der "Erkenntnis" aus beiden: als aus ihren "Stücken" für unrichtig halten, so bleibt doch der grundsätzliche Unterschied zwischen der "Idee", d.i. dem eigentlich Urphänomenalen, und ihren anthropologisch mitbestimmten, uns praktisch erfaßbaren Lebensäußerungen. Haben wir also in irgendwelchen auf solche unendlichen Bereiche bezogenen Beweisen nicht nur die "Idee" der "reinen" Zahlen im Auge, sondern wollen wir – wie es doch stets unsere eigentliche Absicht ist – in ihnen eine praktisch denkbare Mathematik aufbauen, so müssen wir die in unseren Darlegungen besprochenen grundsätzlichen Verhältnisse vorsichtig beachten. Und das scheint mir zu der grundsätzlichen Folgerung zu führen, daß wir in der Tat in spezifisch mathematischen Überlegungen von dem Satz des ausgeschlossenen Dritten keinen Gebrauch machen dürfen.

Ob es nun möglich ist, eine Mathematik aufzubauen, die nicht nur die durch diese Überlegungen aufgezeigten Fehlerquellen und Gefahren vermeidet, sondern die Ablehnung des ausgeschlossenen Dritten zum Boden nimmt für den Aufbau einer Axiomatik, in der diese Gefahren aus positiven Gründen gegenstandslos werden - das zu entscheiden traue ich mir, nicht zu. – Brouwer scheint mir den bisher eingeschlagenen Weg, der jedenfalls auch der nächstliegende war, sozusagen umkehren zu wollen. Wir denken bisher immer noch grundsätzlich im Sinne der Aristotelischen Logik^[37] und betrachten als Normalfall der Bestimmung möglicher Gegenstände, daß die bestimmende Konstruktion zu Ende bringbar sei, da sie den Gegenstand adäquat bestimme. Dementsprechend wenden wir den Satz vom ausgeschlossenen Dritten unbedenklich an. Auch das Unendliche entwickeln wir da, wo wir es einführen, lediglich als Grenzfall des Endlichen. Und nun übertragen wir die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auch auf die "transzendente" Bestimmung durch unendliche Konstruktionen, ohne zu bedenken, daß in der Einführung des Unendlichkeitsgedankens die Inadäquatheit der Bestimmungsmethode an den Gegenstand implizite zugestanden ist. Brouwer scheint umgekehrt die eindeutige Bestimmung eines möglichen Gegenstandes hervorgehen lassen zu wollen aus einer unendlichen – und wohl in jedem praktischen Falle "approximativen" – Einschränkung vorgegebener unendlicher Möglichkeiten. Er arbeitet mit unendlichen "Wahlmöglichkeiten", innerhalb deren dann besondere Möglichkeiten ausgeschlossen werden. So daß der Fall des adäquaten Bestimmens, der da vorläge, wo nur noch eine Wahl offen bleibt, als Grenzfall erscheint. – Ich halte es durchaus nicht für unmöglich, daß diese "Revolution der Mathematik" uns vorwärts bringt, ich selbst aber fühle mich in dieser Frage inkompetent und gebe deshalb auch die Bemerkungen des letzten Absatzes nur als bescheidene Anregungen.

Nachwort über Hilberts Beweistheorie

Die Hilbertsche Beweistheorie sucht – soweit ich sie verstehe ein Verfahren, um Widerspruchlosigkeitsbeweise direkt führen zu können.^[38] Gesetzt, es gelänge auf diesem

³⁷ D.i. "absolut objektivistisch" (im Sinne unserer obigen Ausführungen unter III b): wir denken den Gegenstand als "an sich" unabhängig von dem ihn erlebenden Erleben.

³⁸ Widerspruchslosigkeitsbeweise wurden bisher indirekt geführt: aus der anschaulichen Aufweisung von Gegenständen, die den betreffenden mathematischen Begriffen entsprachen. So die Widerspruchslosigkeit des Begriffes eines irrationalen Verhältnisses ($\sqrt{2}$) aus der Existenz

Wege zu beweisen, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten auch in der Anwendung auf unendliche Bereiche nie auf Widersprüche führen kann – würden hiermit die Brouwerschen Bedenken widerlegt sein? Anders gesagt: würde die Geltung von mathematischen Begriffen, die mit Hilfe jenes Axioms gebildet sind, für mögliche "Gegenstände" gesichert sein? Die Voraussetzung, die Hilbert leitet, muß meines Erachtens dahin verstanden werden, daß Widerspruchslosigkeit stets Anwendbarkeit auf mögliche Gegenstände sichere, weil sie die einzige und zulängliche "Bedingung der Möglichkeit" der Gegenständlichkeit überhaupt bilde. Dieser Gedanke scheint mir zutreffend für endliche Sinngebilde, die als adäquate Bestimmungen ihrer Gegenstände gedacht werden können. Wenn aber zu dem Sinn des auszudrückenden Bestimmens selber der Gedanke der Inadäquatheit gehört – wie er ja im Sinne der unendlichen Konstruktionen impliziert ist –, so sichert die Widerspruchslosigkeit der Konstruktion und aller ihr gemäß zu konstruierenden Gebilde die Gegenständlichkeit gerade desjenigen möglichen Gegenstandes, auf den in der Konstruktion gleichsam hingezielt wird, keineswegs. Die "formal" unbeanstandbare Konstruktion könnte "transzendental" "leer", d.i. ohne möglichen Gegenstand, sein.

Wäre nun eine Mathematik denkbar, die sich auf ein solches rein formales "Spiel" beschränkte, ohne transzendente Anwendbarkeit auch nur grundsätzlich zu beanspruchen? Diese Frage möchte ich nicht durchaus verneinen. Sicher aber wäre dies eine ganz andere Mathematik als die, welche sich in der neueren Geschichte – und zwar in wesentlichen Momenten gerade unter dem Druck physikalischer Aufgaben – entwickelt hat. Wie sich diese zu der uns gewohnten Mathematik verhalten würde, kann vielleicht eine Parallele erläutern. Kant unterscheidet von der "formalen" die "transzendente Logik", welche letztere heutzutage meist Erkenntnistheorie genannt wird. Ich deute den berechtigten Sinn dieser Unterscheidung folgendermaßen. Die formale Logik beschäftigt sich mit dem Sinn der Gegenständlichkeit überhaupt in seiner (normativen) Relevanz für das Denken, nicht aber für die Gegenstände desselben. Die transzendente baut auf denselben Sinn apriorische allgemeine Erkenntnisse über "die" Gegenstände auf. So den Satz der Einheit der Natur unter Gesetzen und seine Unterformen: das Erhaltungsprinzip und das Kausalprinzip. Um dieser apriorischen Sätze über Gegenstände gewiß zu werden, bedarf sie allerdings eines "Postulates", eines Glaubens: sie muß die Gegenstände als grundsätzlich erkennbar voraussetzen. – Entsprechend würde die formale Mathematik sich nur mit den Konstruktionen sinnhaften Bestimmens als solchen beschäftigen; die transzendente dagegen – unter Einführung des Postulates der adäquaten Bestimmbarkeit möglicher Gegenstände durch Sinn überhaupt – die grundsätzliche Anwendbarkeit der Konstruktionen im Auge haben.

Anhang I

Wesentliche und unwesentliche Gesichtspunkte des Bestimmens

Ich habe oben bemerkt, daß die übliche zu weite Fassung des Drittsatzes mit einem metaphysisch gegründeten Ideal oder, wenn man will, einem Postulat zusammenhängt, von dessen Verwirklichung unser faktisches Bestimmen weit entfernt bleibt.

des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks (mit der Kathete 1), die der imaginären Größen ($\sqrt{-1}$) aus der Existenz der Gauß'schen Zahlenebene.

Die dieser Fassung eigentümliche Nichtbeachtung des Gesichtspunktes, unter dem bestimmt wird, wäre nur dann berechtigt, wenn die verschiedenen anwendbaren Gesichtspunkte so zueinander sich verhielten, daß die Systeme der möglichen Bestimmungen, die unter jedem von ihnen getroffen werden können, ohne Überschneidungen oder Lücken und gleichsam in ein und derselben "Region" oder Ebene sich zu einem einzigen System zusammenfügen ließen. Das heißt mit anderen Worten, wenn jeder von ihnen sich als Teilgesichtspunkt eines einzigen gemeinsamen auffassen ließe. Das ist denn auch das unformuliert und unklar der üblichen Fassung des Drittsatzes vorschwebende Ideal.

Bei dieser Fassung ist nämlich stillschweigend vorausgesetzt, daß die zu bestimmenden Gegenstände echte "Gegenstände an sich" seien, die ohne eine Schichtung und Abstufung relativer Objektivität zuzulassen, alle in der gleichen Objektivitätsebene nebeneinander liegen. Das (postulierte) System des Bestimmens, welches diesen "Gegenständen an sich" adäquat sein würde, wäre dann dasjenige, auf welches jene weite Fassung des Drittsatzes allein Bezug nimmt. Die von uns tatsächlich angewandten Bestimmungen dagegen würden den Bestimmbarkeiten dieser Gegenstände an sich nicht entsprechen; sie würden sich vielmehr sozusagen auf Zwischengebilde beziehen, welche ihrerseits zwischen jenen Gegenständen an sich und dem (nun ebenso absolut und als für-sich-seiend d.i. "objektiv" gedachten) bestimmenden Erleben des Ich stehen würden. In hergebrachter Weise könnte man jene Gegenstände an sich "Wesen" und ihre (ideal postulierten) Bestimmbarkeiten an sich "Wesenseigenschaften" nennen, die relativ "subjektiven" Zwischengebilde dagegen "Erscheinungen" (oder wohl auch "Gedanken") und "phänomenale" (vielleicht auch "noetische") Bestimmtheiten. Die einander heterogenen Gesichtspunkte, unter denen wir nun in der Praxis unseres Denkens bestimmen, würden dann als nur den Erscheinungen adäquat, dem Wesen aber mehr oder weniger inadäquat vorausgesetzt werden.

Ich füge hinzu, daß ich diese ganze absolutistische Betrachtungsweise, die sich auf der Unterscheidung von Gegenständen an sich und Ich an sich (welches selbst zugleich als eine Art Gegenstand an sich gilt) für den (im bewußten Leben sich verwirklichenden) Ausdruck einer geschichtlich-faktischen "Existenzstufe" des sich selbst jeweilig nur unvollkommen verstehenden Lebens halte. "Bessere" Selbstbesinnung zeigt uns folgendes: einerseits ist schon in der unvermeidlichen Unterscheidung der zu denkenden Sache von ihrer Beschaffenheit (= Bestimmbarkeit) eine unlösbare Korrelation von Erleben überhaupt und Gegenstand überhaupt impliziert, so daß schon der hier vorausgesetzte Gedanke absolut für sich seiender Gegenstände wie der eines selbst absolut gegenständlichen Erlebens als Ausdruck eines Selbstmißverständnisses angesehen werden muß; andererseits wird schon diese "Beschaffenheit" gegenüber der Sache als relativ subjektiv gedacht. Deshalb stehen auch die sich auf diese Weise ergebenden drei relativen Unterscheidungen Sache – Beschaffenheit³⁹ – Erleben nicht wie rein und ausschließlich als solche zu denkende "Objekte" ein für alle Male nebeneinander, sondern schieben sich in der Anwendung in einer beiderseits ungeschlossenen unendlichen Iterationsreihe durch "Umdeutungen" oder Standpunktverschiebungen hin und her, so daß "Gegenstand an sich" und (nicht gegenständliches) "reines Erleben überhaupt" Grenzbegriffe werden. Der Standpunkt unseres Erlebens aber liegt stets irgendwo zwischen

³⁹ Schon dies ist eine Vereinfachung der Sinnstruktur, um die es sich hier handelt: was vom Gegenstand her und mit Bezug auf ihn (und sein "grenzbegrifflich" zu denkendes An-sich) Beschaffenheit heißt, müßte vom Erleben her gesehen. "bestimmende Sinngebung" heißen.

diesen idealen Grenzen, und jede Anwendung der (an sich selbst festen) Sinnmomente (Begriffe) "objektiv" und "subjektiv" hat die nur relative Bedeutung eines Mehr oder Weniger mit Bezug auf bestimmte andere Bewußtseinsinhalte, die zugleich als möglich erlebt werden.

Ich erläutere die vorangehenden Bemerkungen an einem einfachen Beispiel. Die Gesichtspunkte der Bestimmungen süß, hart, weiß, die wir etwa dem Zucker geben, stehen nicht so zueinander, daß ihre Systeme zusammengenommen ein einziges geschlossenes System bildeten ohne Überschneidungen oder Lücken. Durch die mögliche Bestimmung nicht-süß z.B. müßte ja sonst nicht nur jede andere Geschmacksbestimmung, sondern auch hart und weiß ausgeschlossen sein. Eben darum gelten die in jenen drei Bestimmungen angewandten Gesichtspunkte dem "Wesen" des Zuckers gegenüber als inadäquat, d.h. positiv als Bestimmungen von bloßen "Erscheinungen" dieses "Wesens". Dies Verhältnis von Wesen und Erscheinung wird nun aber unter dem Einfluß des ontischen Objektivismus gänzlich ins Objektive verlegt⁴⁰ und als das von Substanz und Akzidens gefaßt. Als ideale Forderung wird zugleich subintelligiert, daß im adäquaten Bestimmen ein Gesichtspunkt anzuwenden sei, der dem "Wesen" selbst adäquat ist, den wir aber nicht (noch nicht) kennen. Denken wir uns aber etwa Gott als einen Geist, der solchen adäquaten Bestimmen des Wesens fähig ist, so würde dieser an Stelle jener drei eine einzige Bestimmung treffen, und zwar diejenige, welche (im Sinne der konsequenten Durchführung der Unterscheidung Wesen – Erscheinung) völlig "objektiv" wäre. In dieser dem Objekt adäquaten Bestimmung würden unsere relativ subjektiv-getrübten drei oder mehr Bestimmungen derart zusammengefaßt und überboten sein, daß man aus der Einsicht in das eine Wesen der Sache, sobald man die Bedingungen unseres (menschlichen) Erlebens derselben hinzunimmt, die Möglichkeit und (menschliche) Notwendigkeit jener verschiedenen Bestimmungen (und der einander heterogenen Gesichtspunkte, unter denen sie getroffen werden) würde erklären und ableiten können.

Die übliche Formulierung des Drittsatzes verstehen wir nun daraus, daß in ihr nicht der Sinn "unseres" faktischen Bestimmens, sondern der des als Ideal vorschwebenden Bestimmens zum Ausdruck gebracht wird, das dem Wesen der "Dinge an sich" adäquat sein würde; ein Gedanke, den man an der "Vollkommenheit" erläutert, mit der Gott die Dinge erkennen würde.

Anhang II

Ein Beispiel für die Inadäquatheit, die sich im Unendlichkeitsgedanken ausdrückt

Ich erläutere an einem Beispiel, in welchem Sinne die Unendlichkeit und der approximative Charakter von mathematischen Konstruktionen als Ausdruck dafür zu verstehen ist, daß das in dieser Konstruktion sich darstellende sinnhafte Gesetz des Bestimmens dem zu bestimmenden (möglichen) Gegenstände inadäquat ist.

Irrationale Zahlen sind solche, die in keinem Bruche ausdrückbar sind und deren Darstellung als Dezimalzahl daher nach dem Komma unendlich viele Stellen fordern würde, ohne periodisch zu werden. Der Begriff der Irrationalzahl enthält keinen versteckten Widerspruch, der Sinn derselben bestimmt vielmehr mögliche Gegenstände;

⁴⁰ So deutlich und in geschichtlich folgenreicher Weise in der Gegenüberstellung von Wesen (gleich Form) und Materie bei Aristoteles.

das sieht man sozusagen mittelbar und a posteriori daran, daß Gegenstände anschaulich gemacht werden können, deren Beschaffenheit irrationale Bestimmung fordert. Ein solcher Gegenstand ist, wie schon dem Altertum bekannt war; das Verhältnis der Hypotenuse eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks zu einer seiner Katheten. Dieses Verhältnis ist inkommensurabel. Wenn die Kathete gleich 1 gesetzt wird, drücken wir es aus als $\sqrt{2}$. Die Inkommensurabilität dieses Verhältnisses und die Irrationalität des Bruches $\sqrt{2}$ bedeutet: so weitgehend wir auch die Kathete in gleiche Teile zerlegen, wir gelangen auf diese Weise nie auf eine Einheit, aus deren zählender Summierung sich die Länge der Hypotenuse ohne Fehler aufbauen ließe. Das aber bedeutet: die methodische Konstruktion des Dividierens und Multiplizierens, die an die Bedingung der Größengleichheit der dabei zu gewinnenden und aufbauend wieder zu verwendenden Einheiten gebunden ist, ist grundsätzlich nicht imstande das hier vorliegende gegenständliche Verhältnis zu bestimmen. Die Unendlichkeit des irrationalen Dezimalbruches (oder auch Dual-Trialbruches usw.) und der nur approximative Sinn, in dem er das zu bestimmende Verhältnis bestimmt, ist die logische Folge dieser Inadäquatheit der Konstruktionsmethode gegenüber dem Gegenstande.

Anhang III

Der haltbare Sinn des sogenannten "Axioms der Existenz des Unendlichen"

Gegenständlich Unendliches (d.h. sowohl unendliche Gegenstände wie gegenständliche Mengen von Gegenständen) kann faktisch nicht gedacht und deshalb auch durch eine auf das faktische Denken gerichtete "Anschauung" nie "aufgewiesen" werden. Das faktische Erleben solcher Gegenstände "als" Gegenstände würde nämlich voraussetzen, daß sie, d.h. hier ihre "Elemente" alle dem "einzigsten" "Ich" (das dem Erleben selbst zum Objekt werden kann) in bestimmter Weise – nämlich als ihm transzendent gegenüberstehende – faktisch zugeordnet würden. Es ist aber a priori einsichtig, daß dies unmöglich ist, da es ja der Sinn der Gegenständlichkeit ist, der es ausschließt. (Dies gegen Husserl und die Phänomenologie, die sich hier als zur Grundlegung der Mathematik unfähig erweist.)^[41] Die nicht "schaubare", wohl aber (und zwar sogar in jedem Erlebnis) "gespürte" Iterierbarkeit des Erlebens dagegen und das "verstehende" Bewußtsein, daß diese Iterierbarkeit eine urphänomenale Bestimmtheit des Erlebens überhaupt zur Anwendung und damit zum Ausdruck bringt, ist der Eingang zu der Erlebensmöglichkeit unendlicher Gedanken. Denn die in ihm gedachten Möglichkeiten ergeben sich aus den Iterationen des "Michselbsterlebens". Im Erleben dieser Möglichkeiten werden zwar stets Inbegriffe von Gegenständen als möglich "vorgestellt", und zwar Inbegriffe, die in einer vorgestellten Ordnung dem Ich gegenüber angeordnet gedacht werden. Das aber, was so als Gegenstände vorstellend erlebt wird, sind stets nur endliche Mengen von Gegenständen. Der Gedanke der Unendlichkeit baut sich auf dieses Vorstellen dann erst dadurch auf, daß zu ihm ein spezifisches "Spüren" hinzutritt, welches als solches nicht mehr auf mögliche Gegenstände, sondern auf Möglichkeiten des spezifischen Sinnerlebens gerichtet ist. Ein Spüren, dessen Gehalt man, als den der Möglichkeit eines gleichsam rückwärts gerichteten "Immer-weiter-gehens" im Erleben bezeichnen könnte. Dieses Immer-weiter-gehen würde bei jedem Schritte in andere Schichten des erlebenden Selbst hineinführen und mich damit jedesmal auch ein gleichsam neues Ich

⁴¹ Vgl. hierzu meine Einwände gegen den für Husserl grundlegenden Begriff (schaubarer) "allgemeiner Gegenständein: Metaphysik oder verstehende Sinn. Wissenschaft? § 9.

erleben lassen.^[42] Der Gedanke der Unendlichkeit liegt also niemals in dem, was als gegenständlich vorgestellt oder gedacht wird, sondern nur in der Verbindung des so als möglich erlebten Gegenständlichen mit einem an sich ungegenständlichen Spüren. Trotz der sich hieraus ergebenden "Unerfüllbarkeit" des Unendlichkeitsgedankens durch irgendwie als möglich erlebbare Gegenstände hat demnach dieser Gedanke in Hinblick auf das jederzeit hinzutretende Spüren jenes möglichen Immer-weiter des "Erlebens" einen guten Sinn.

Man kann diesem Sinn nun auch eine "Bedeutung" zuschreiben, d.h. eine Triftigkeit für Gegenstände, die sich in freilich ganz anderer Weise auf diese bezieht als in dem der anschaulichen "Erfüllung". Der Sinn Unendlichkeit besagt nämlich etwas über das Verhältnis dieser Gegenstände zu dem sie erlebenden Bestimmen. Es "gibt" nicht unendliche Gegenstände, da Gegenstände ja, dem einzigen Ich gegenüber und um der Einheit der Ordnung dieses Gegenüber willen als eine "endliche" Menge gedacht werden müssen, aber ich spüre und verstehe "in .mir" die unendlichen "Möglichkeiten" des sich iterierenden Erlebens, und als Sinngehalt dieser Möglichkeiten ist der Gedanke eines unendlichen Erlebens von möglichen Gegenständen selbst "sinnvoll". Denn er besagt, daß Gegenstände gedacht werden können, ja daß eigentlich sogar jeder als solcher zu denkende Gegenstand gedacht werden muß als nicht adäquat gegenüber der sinnhaft konstruierenden Methode, in der sein "Begriff" aufgebaut wird.

In den Approximationsmethoden wird unter Implizierung des Unendlichkeitsbegriffes in der angegebenen Bedeutung eine eigenartige Konstruktionsweise bestimmender Begriffe entdeckt, die die Inadäquatheit des Bestimmens zu dem zu denkenden Gegenstand anerkennt und zugleich in gewisser Weise überwindet. Man darf sagen: die Welt der Gegenstände ist endlich, das erlebende Ich dagegen der Quell aller Unendlichkeit.

The text was originally edited and rendered into PDF file for the e-journal <www.vordenker.de> by E. von Goldammer.

Copyright 2004 vordenker.de

This material may be freely copied and reused, provided the author and sources are cited
a printable version may be obtained from webmaster@vordenker.de

vordenker
ISSN 1619-9324

⁴² Vgl. die Reihe S_1, S_2, S_3 usw. in "Das Verstehen ..." S. 11.