Deutsche Übersetzung: *Rajko Aust* (Sommer 2013)
vordenker
Sommer-Edition 2013

Achilles und die Schildkröte

von *Gotthard Günther*

Dies, meine Herren, ist eine gehörige Dosis philosophischer Logik. Und es ist zudem ein dreiteiliger Artikel. Aber es gibt einen einfachen Grund, warum dieses Magazin ihn enthalten sollte; er ist ein streng logisches Angehen des Problems interstellarer Flüge. Dies ist ein ganzheitlicher Angriff auf die Frage, was der gute alte "Space Warp" oder "Hyper-Raum" in wissenschaftlich-physikalischer Hinsicht bedeutet. Und er beginnt zwangsläufig mit der uralten Frage: "Was ist Bewegung?" Wenn wir den Grenzen der Relativität zu entkommen trachten, müssen wir auf einer grundsätzlicheren Ebene beginnen und dürfen nicht auf der Relativität aufbauen.

– Teil 1 von 3 –

Es ist wahrscheinlich, dass sich das Problem der interplanetaren Raumfahrt mit wissenschaftlich-technischen Begriffen lösen lässt, die uns bereits vertraut sind. Aber die Situation sieht ganz anders aus, wenn wir die Frage des interstellaren oder gar intergalaktischen Reisens angehen. Die Entfernungen sind so gigantisch, dass interplanetare Verfahren nutzlos sein werden, ebenso wie die logischen und physikalische Konzepte, auf denen sie beruhen. Der folgende Artikel versucht, einige neue Konzepte zu präsentieren – ausgelöst durch die jüngsten Entwicklungen in der Mathematik und Physik – welche die Lösung des Problems, wie man die Tiefen des Weltalls überwindet, zu enthalten scheinen.

Die Ideen, die in diesem Artikel zum Ausdruck kommen, sind aus einer Korrespondenz zwischen John W. Campbell, Jr. und dem Autor erwachsen. Obwohl auf Herrn Campbell im Text gelegentlich verwiesen wurde, ist sein Anteil an den darin ausgedrückten Ideen sehr viel größer. In der Tat gibt es kaum einen Gesichtspunkt in der Entwicklung des Problems, an dem er nicht beteiligt war. Und so soll das, was er als seinen Anteil beansprucht, auch als solcher anerkannt werden. Die Darstellung als solche liegt in der alleinigen Verantwortung des Autors, und alle Fehler, die aufgetreten sein könnten, sind allein die seinigen.

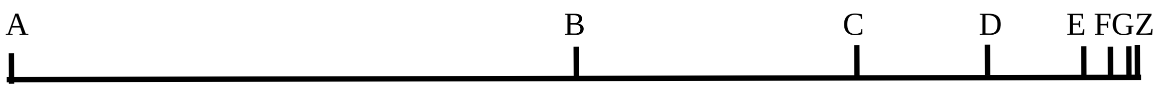
Sie wissen also wirklich genau, was Bewegung im Raum bedeutet? Wenn Sie sich hinter das Lenkrad Ihres Wagens setzen und, sagen wir, von New York City nach San Francisco fahren, wissen Sie genau, was Sie da tun? Nun, lassen Sie uns eingestehen, dass Sie in einer praktischen Art und Weise in der Tat wissen, was sie tun. Wenn nicht, dann möge Gott die anderen Straßennutzer schützen. Es ist jedoch eine ganz andere Angelegenheit, wenn wir die Frage stellen: Wissen wir, in exakten theoretischen und wissenschaftliche Begriffen, was Bewegung im Raum eigentlich ist und wie diese stattfindet? Die Antwort ist ein sehr emphatisches Nein! Es mag seltsam erscheinen, dass etwas so alltägliches, etwas, das wir jeden Tag tun, solange wir leben, ungelöste logische und wissenschaftliche Probleme enthält. Aber das ist der Fall. Es ist immer noch ein komplettes Rätsel für uns, was eigentlich passiert, wenn sich ein physischer Körper von einem Punkt im Raum zu einem anderen Punkt bewegt.

Es gibt einen Grund dafür. Wir beginnen heute allmählich zu wissen, was Materie ist und welche Grundgesetze ihre endgültige Struktur zu definieren scheinen. Aber wir haben nicht die geringste Ahnung, was Raum – also die bloße Abwesenheit von irgendetwas "physischem" – bedeuten könnte. Es liegt nahe: Solange wir nicht wenigstens eine ungefähre Bedeutung für den allgemeinen Begriff des Raumes angeben können, wird es absolut unmöglich, selbst die verschwommenste Vorstellung davon zu haben, was wirklich passiert, wenn ein Körper sich im Raum von einem Punkt zu einem anderen bewegt. Wenn wir es zu erklären versuchen, erhalten wir Widersprüche und Paradoxien – ein klares Indiz dafür, dass unsere gegenwärtigen Denkmethoden unzureichend sind, auch nur das Problem zu formulieren.

Dies ist seit den Zeiten des antiken Griechenlands bekannt, und die berühmteste Darstellung des Rätsels, welches das Phänomen der Bewegung im Raum bietet, ist Zenon von Eleas Paradox von Achilles und der Schildkröte. Achilles, der schnellste Läufer, der je gelebt hat, kann die Schildkröte, das langsamste Tier, nicht überholen. Zenons Argumentation geht wie folgt:

Es sei A - Z (siehe Diagramm unten) die Rennstrecke.

Achilles startet von A, die Schildkröte zugleich von B aus. Wenn wir annehmen, dass der homerische Held doppelt so schnell wie das Tier läuft, scheint die Folgerung unvermeidlich, dass beide Kontrahenten Punkt Z zur gleichen Zeit erreichen sollten; aber das war nicht Zenons Schlussfolgerung. Dieser berühmte Philosoph argumentierte, dass während Achilles die Entfernung A-B zurücklegt, die Schildkröte Punkt C erreicht, auf halbem Wege zwischen B und Z. Wenn Achilles bei C ankommt, muss das Tier D erreicht haben, diesmal in der Mitte zwischen C und D. Wenn Achilles bei D ist, muss die Schildkröte bis E gelangt sein. Wenn Achilles E passiert, ist das Tier notwendigerweise auf F. Und wenn unser Held bei F ist, hat die Schildkröte wieder den halben Abstand zwischen F und Z zurückgelegt und ist daher jetzt auf G, und so weiter *ad infinitum*. Daraus folgt, so Zenons Schluss, dass Achilles die Schildkröte niemals überholen kann. Und übrigens auch keiner der beiden Läufer jemals Z erreichen kann.



Der Knackpunkt der Argumentation ist natürlich der "Fluss der Zeit". Wann immer Achilles einen bestimmten Punkt erreicht, brauchte er dafür Zeit, um vom vorherigen Punkt dort hin zu gelangen, und während diese Zeit verstrich, hat sich die Schildkröte zum nächsten Punkt fortbewegt, da das Tier sich in konstanter Bewegung befindet. Und egal, wie kurz die Distanz letztendlich wird, es wird immer etwas Zeit vergehen, bevor Achilles sie zurückgelegt hat, und während dieser Zeitspanne wird sich die Schildkröte von dem Punkt weg bewegt haben, den ihr Verfolger dann erreicht haben wird.

Es gibt nur eine Möglichkeit, wie Achilles die Schildkröte einholen könnte. Wenn der homerische Held sich mit unendlicher Geschwindigkeit bewegen würde und daher die Abstände zwischen A, B, C, D...Z in Nullzeit zurücklegen würde, dann hätte die Schildkröte keine Zeit, vom Punkt B weg zu kommen, sobald das Rennen beginnt. Der Beginn des Rennens und sein Ende wären der gleiche identische Moment. In anderen Worten: Es gäbe überhaupt kein Rennen. Aber wenn es ein Rennen gibt – mit endlicher Geschwindigkeit der Teilnehmer – wird niemals jemand überholt werden.

Wir alle wissen aus der praktischen Sicht unserer alltäglichen Erfahrung, dass Zenons Argumentation purer Nonsens ist. Aber die verblüffende Sache ist, dass, obwohl ihm durch die alltäglichsten Handlungen in jedermanns Leben widersprochen wird, Zenons Standpunkt *logisch* unangreifbar ist. Es gibt keinen technischen Fehler in seiner Argumentation. Mit seinem Paradoxon hat er in der Tat das eigentliche Problem des Raumes und seine Beziehung zur Bewegung berührt, und seine Argumentation zeigt einen der tiefsten Einblicke in die metaphysische Struktur der Welt. Alfred North Whitehead bemerkte einmal: "Ich weise meine Schüler gern darauf hin, dass es zum Höhepunkt eines Triumphes zählt, in jedem Jahrhundert, nachdem man etwas geschrieben hat, widerlegt zu werden. Ich mache diese Bemerkung immer in Verbindung mit Zenon. Niemand hat sich jemals mit Zenon beschäftigt, ohne ihn zu widerlegen und jedes Jahrhundert denkt, dass es sich lohnt, ihn zu widerlegen." (*Essays in Science und Philosophy*, New York 1947, S.114.) Offensichtlich ist keine dieser Widerlegungen jemals endgültig. Zenons Paradox ist jetzt mehr als 2000 Jahre alt und die Diskussion über seinen Wert ist noch rege im Gange.

Doch in modernen Lehrbüchern der Logik und Metaphysik kann der Leser regelmäßig eine (falsche) Erklärung dahingehend finden, dass die Infinitesimalrechnung Zenons Problem schließlich gelöst hätte. Die Argumentation geht üblicherweise wie folgt: Mathematisch gesprochen stellt sich das Paradoxon der Bewegung im Raum als ein Grenzwertproblem dar. Wenn unsere Rennstrecke AZ = x ist und Achilles' Handicap AB = 1, dann haben wir offensichtlich x = 2.

Aber Zenon bildete eine endlose Folge AB + BC + CD + DE + EF + ... mit der Forderung, dass jede gegebene Strecke (außer der ersten) genau die Hälfte der vorherigen beträgt. Daher erhalten wir für x die Gleichung:

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots ad-infinitum$$

Die Frage ist nun: Ist die rechte Seite der Gleichung gleich 2? Wenn das der Fall ist, dann ist es mathematisch bewiesen, dass Achilles die Schildkröte am Punkt Z überholen muss.

Das ist nun der Moment, in dem der Begriff des "Grenzwerts" eingeführt wird. Dies ist ein Hilfsmittel, das es uns erlaubt, die Unendlichkeit der numerischen Ausdrücke, die auf der rechten Seite unserer Gleichung für x auftauchen, durch eine endliche Operation zu umschreiben. Das verwendete Verfahren wurde vom französischen Mathematiker Cauchy (1789-1857) entwickelt und es zeigt, dass die rechte Seite unserer Gleichung genau 2 ist. Der "Trick" von Cauchys Technik ist natürlich, dass er das Unendliche beseitigt, da wir es nicht denken können und es durch den Begriff "Grenzwert" ersetzt. Dieser Ersatzbegriff erlaubt eine strenge mathematische Behandlung [1] und erzeugt eine "Lösung" für Zenons Paradoxon.

Lassen sie uns nun einen genaueren Blick auf die "Lösung" werfen. Was zeigt sie wirklich? Sie zeigt in der strengsten Weise, dass die Erfahrung unseres gesunden Menschenverstands, dass Achilles die Schildkröte *wirklich* überholt, richtig ist. Aber das wissen wir sowieso. Und keine Person hat jemals ernsthaft daran gezweifelt. Noch nicht einmal Zenon selbst! Als er sein berühmtes Paradoxon entwickelte, meinte er etwas ganz anderes. Wenn er es seinen Schülern erklärte, könnte er gesagt haben: Da ist eine triviale und alltägliche Erscheinung wie Bewegung im Raum. Sie ist absolut überzeugend für unsere Sinne, und niemand zweifelt an ihrer Existenz. Aber gleichzeitig trotzt diese triviale Tatsache jedem Versuch, sie in widerspruchsfreien Begriffen zu denken. Das Phänomen der Bewegung als solches ist positiv nicht zu denken. Und es ist undenkbar, weil es mit dem Konzept der Unendlichkeit einhergeht. Denkt die Unendlichkeit und ihr werdet mein Paradoxon gelöst haben. Aber da liegt der Hund begraben: Unendlichkeit ist undenkbar für das menschliche Denken.

Dies zeigt uns, dass die Lösung, die die moderne Infinitesimalrechnung anbietet, keine echte logische Lösung ist. Sie umgeht die eigentliche Schwierigkeit, das Problem der Unendlichkeit, und ersetzt sie durch ein anderes Konzept, dem des Grenzwerts, welches unserer normalen praktischen Erfahrung entspricht. Sie zeigt uns nicht, wie wir das Element der Unendlichkeit, welches mit dem Geheimnis der Bewegung zusammenhängt, *denken* sollen. Diese Lösung bewirkt genau das Gegenteil, sie zeigt uns, wie wir dies – das Denken der Unendlichkeit – vermeiden können. Zenons ursprüngliches Problem: "Was ist es, dass ein scheinbar unlösbares Paradoxon in unserem Bewusstsein schafft, wenn wir 'Bewegung' zu denken versuchen?" wird durch die Technik der Infinitesimalrechnung nicht gelöst. Dies wurde durch die Geschichte des Kalküls selbst bestätigt. Seine ersten Entdecker, Newton und Leibniz, bemühten sich sehr, das Konzept unendlich kleiner Größen aus ihren mathematischen Verfahren auszuschließen. Allerdings gelang ihnen das nicht vollständig. Die Gültigkeit ihrer Methoden wurde angezweifelt, und die Technik der Infinitesimalrechnung erreichte seine volle wissenschaftliche Strenge nicht, bis der Begriff der Unendlichkeit schließlich eliminiert wurde und durch das bescheidenere Konzept des "Grenzwerts" ersetzt wurde. Die Infinitesimalrechnung wurde als unfähig erkannt, mit den Problemen der echten Unendlichkeit fertig zu werden und der Kern von Zenons Paradoxon blieb ungelöst.[2]

"Na und?", fragt sich der Leser jetzt vielleicht, "Reicht es nicht aus, dass wir ein mathematisches Werkzeug haben, das jede beliebige Art von Bewegung, die wir im Raum beobachten können, berechnen kann? Die Berechnung genügt allen praktischen Zwecken. Also warum sollen wir uns mit den metaphysischen Eigenschaften von Raum, Zeit und Bewegung herumschlagen?"

Es tut mir leid, aber das alles ist nicht so einfach. Erstens, unsere Berechnungsmethoden reichen bereits nicht mehr aus, wenn wir auf das so genannte Drei-Körper-Problem treffen. Und dann: wie steht es mit interstellaren Reisen? Bestehende und berechenbare Arten der Fortbewegung können für Reisen auf diesem Planeten und sogar im interplanetaren Raum ausreichend sein. Aber sie sind entschieden unzulänglich, wenn es darum geht, interstellare Distanzen innerhalb einer angemessenen Zeitspanne zu überbrücken. Solange wir überhaupt nichts über die strukturellen Eigenschaften so genannter "Kontinua" wissen – der Raum als solcher ist ein "Kontinuum" und genauso die Zeit – können wir nicht einmal die Frage stellen, ob diese bisher noch unbekannten Eigenschaften Arten der Fortbewegung erlauben könnten, welche gleichfalls noch unbekannt sind und durch die ein Körper (ein Raumschiff) seine eigene Position im Raum verändern könnte. Die Idee einer "Raumkrümmung" (space warp), die einem so häufig in der Science Fiction begegnet, weist in diese Richtung. Wenn so etwas existierte, wäre es eine "Bewegung", die in anderen Begriffen als Abständen oder Zeiteinheiten gemessen werden würde. Der einzige Weg, die physikalischen Möglichkeiten, die in dieser Richtung liegen könnten, zu entdecken und zu erforschen, ist die Analyse der paradoxen Eigenschaften des Raum-Zeit-Kontinuums. Und diese Eigenschaften sind die strukturellen Merkmale des Unendlichen. Deshalb sollte Zenon für uns immer noch sehr aktuell sein.

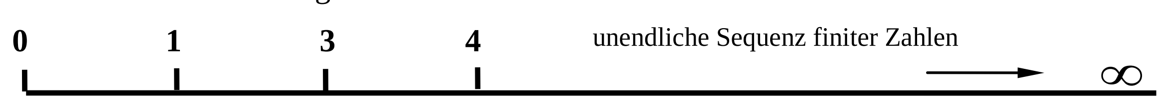
Es ist offensichtlich, dass der Fehler, der Zenons Problem zum Verschwinden brachte, der Fehler der Mathematik war, eine Methode zu entwickeln, das Unendliche zu bewältigen. Das Unendliche war nur die Grenze unserer numerischen Vorstellungen. Wir konnten uns ihm nähern, es aber nie erreichen, und innerhalb seines Reiches brachen alle operationalen Prozeduren zusammen. Unendlich plus eins war Unendlich. Unendlich plus eine Million war Unendlich und Unendlich plus Unendlich war nichts als Unendlich. Anders ausgedrückt: Unendlich war die absolute Grenze für den Zählvorgang und daher das begrenzende Konzept der Quantität im Allgemeinen. Das war, was die Kinder in der Schule gelernt hatten, und es war auch die Grenze der Weisheit für den vollendeten Mathematiker.

Aber all dies änderte sich, über Nacht sozusagen, durch die Arbeit eines Mannes, der gleich zu setzen ist mit den Größten in der Geschichte der Mathematik. Sein Name war Georg Cantor (1845-1918). Er wurde in Russland geboren, lebte den größten Teil seines Lebens in Deutschland und starb als Professor für Mathematik an der Universität Halle (Deutschland). Im letzten Viertel des vergangenen Jahrhunderts veröffentlichte Cantor eine Reihe von Artikeln, die unseren Begriff der Zahl, des Zählens und allgemein der Quantität komplett revolutionierten. In diesen Artikeln transzendiert Cantor das Konzept der Grenze und bringt so letztlich das Konzept der Unendlichkeit in die Reichweite mathematischer Verfahren.

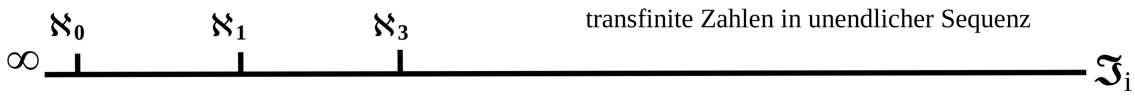
Cantors Ergebnisse sind so verblüffend, ja, so unglaublich und fantastisch für das normale Denken, dass sie zunächst von Mathematikern aus allen Richtungen angegriffen wurden. Heute sind sie grundsätzlich akzeptiert, und sie haben zu einer radikalen Überarbeitung der Grundlagen sowohl der traditionellen Logik als auch der klassischen Mathematik geführt. Was Cantor entdeckt hat, lässt sich in folgender Aussage zusammenfassen: Wir sind im Irrtum, wenn wir davon ausgehen, dass der Prozess des Zählens durch das Konzept des Unendlichen beschränkt wird und dass das Unendliche selbst keine bestimmten quantitativen Eigenschaften hat. Es ist im Gegenteil möglich, *über das Unendliche hinaus* zu zählen und eine endlose Reihe von Zahlen zu konstruieren, von denen die kleinste unser traditionelles Konzept des Unendlichen ist. Jede nachfolgende Zahl in dieser Reihe ist von einer höheren arithmetischen Mächtigkeit als das bloße Unendliche. Cantor nannte diese Zahlen, die von einer höheren numerischen Mächtigkeit sind als das bloße Grenzwert-Konzept des Unendlichen die transfiniten Zahlen oder transfinite Mengen.

In anderen Worten: Cantor unterscheidet zwei strukturell unterschiedliche Arten von Zahlen. Die erste Gruppe sind unsere bekannten Zahlen, die endliche Gegenstände und Beziehungen bezeichnen.

Das finite Reich der Zählung:

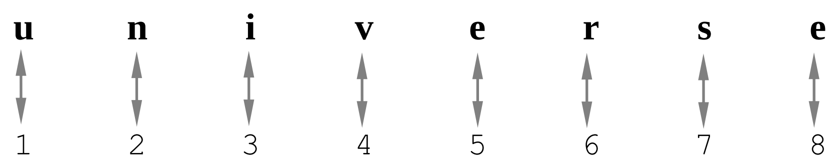


Die zweite Gruppe umfasst das transfinite Reich der Zählung:



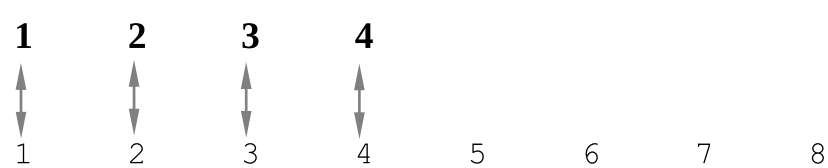
Um diese transfiniten Zahlen zu benennen, verwendet Cantor den ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets: Aleph mit einem numerischen Index. Seine Zahlen werden daher Aleph-Zahlen, oder kurz Alephs genannt. Sie beginnen, wie unsere Abbildung zeigt, mit $\aleph_0$ oder Aleph-null, manchmal auch als Aleph naught (engl. *naught*: null) bezeichnet; sie sind das *komplette* traditionelle Unendliche und steigen von dort zu immer höherer numerischer Mächtigkeit des Transfiniten auf, um schließlich gegen eine transfinite Grenze $\mathfrak{I}_i$ [3] zu konvergieren. Um die fantastischen Größenordnungen zu verstehen, die in dem transfiniten Reich der Zählung inbegriffen sind, sollte man verstehen, dass, wenn $\aleph_0$ die abgeschlossene traditionelle Ordnung des Unendlichen ist, $\aleph_1$ dann eine Zahl ist, die gegenüber dem traditionellen Unendlichen eine unendliche Mächtigkeit darstellt. Nun, wenn ein Mathematiker den unerhörten Anspruch erhebt, dass er eine neue Art von Zahlenfolgen entdeckt hat, kraft derer er Unterschiede der Mächtigkeit innerhalb des Unendlichen bestimmen kann, ist er natürlich verpflichtet zu erklären, wie sich sein neues Konzept von Zahlen von unseren vertrauten endlichen Zahlen unterscheidet. Cantors Erklärung ist sehr einfach und kann ohne spezielle mathematische Vorbildung verstanden werden. Wir müssen nur ein paar vorbereitende Schritte tun.

Zunächst fragen wir, was machen wir, wenn wir zählen? Die Antwort ist: Wir schaffen eine 1:1-Entsprechung zwischen einer Gruppe von Objekten und einer zweiten Gruppe von numerischen Konzepten. Lassen sie uns zum Beispiel die Buchstaben in dem Wort "universe" zählen:



Unsere Doppelpfeile zeigen die 1:1-Entsprechung zwischen Buchstabe und Zahl an, und wir sehen, dass die *Kardinalzahl*, die die Menge der Buchstaben in "universe" bestimmt, acht ist. Mit anderen Worten, "8" repräsentiert eine Menge von ganzen Zahlen, die äquivalent zu der Anzahl der Buchstaben in unserem Wort ist. Natürlich ist es offensichtlich, dass, wenn wir "8" eine Menge von ganzen Zahlen nennen, "1", "2", "3", "4", ... Teilmengen unserer ursprünglichen Menge sind. Und so wie wir auch Briefe, Äpfel, Pferde, Autos oder Ideen gezählt haben könnten, könnten wir ebenso auch eine dieser Teilmengen gezählt haben.

Nehmen wir zum Beispiel die Teilmenge "4" und zählen sie mit unserer Originalmenge:



Jeder kann sehen, dass das Ergebnis keine 1:1-Entsprechung zwischen unseren Zähl-Zahlen (unten) und unseren gezählten Objekten (die Menge "4") ist, sondern eine 1:2-Entsprechung. Es gibt keine Äquivalenz zwischen unseren Zählzahlen und der gezählten Menge. Wir entdecken hier das grundlegende logische Merkmal aller endlichen Zahlen, welches wie folgt ausgedrückt werden kann:

Keine endliche Zahlenmenge ist äquivalent zu einer echten Teilmenge ihrer selbst.

Diese Maxime gilt uneingeschränkt für den endlichen Bereich des Zählens und ihre Anwendung zeigt uns, dass eine bestimmte fragliche Zahl endlich ist. Aber was für das Endliche offensichtlich ist, ist falsch für das Unendliche!

Um das Folgende zu verstehen, lassen sie mich daran erinnern, dass die numerische Mächtigkeit einer gezählten Menge stets durch eine 1:1-Entsprechung mit einer Zählmenge festgelegt wird – so wie es mit den Buchstaben von "universe" und der Menge "8" der Fall war. Wenden wir uns nun unendlichen Mengen zu, so scheint es, dass die Menge aller positiven ganzen Zahlen (gerade *und* ungerade) von einer höheren numerischen Mächtigkeit sein sollte als die geraden Zahlen. Wir wenden wiederum unser System der Paarbildung von Gezähltem (oben) und Zählnummern (unten) an:

2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**…**
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**…**

Egal, wie lange wir unsere Paarbildung weiterführen – und wir annehmen, dass es sich um eine unendliche Folge handelt – werden uns nie die Zählzahlen ausgehen, aber wir werden auch die Folge der geraden Zahlen nicht ausschöpfen, die wir zählen wollen. Natürlich ist die Klasse der geraden Zahlen "ausgedünnt" im Vergleich zur Klasse aller ganzer Zahlen, aber diese "Ausdünnung" hat nicht den geringsten Einfluss auf die Art der numerischen Mächtigkeit der "ausgedünnten" Folge. Das ist eben die Eigenschaft der kleinsten Form des Unendlichen!

Um diesen wichtigsten Punkt klar zu machen, werde ich Ihnen zwei weitere Beispiele solcher "Ausdünnungs"-Prozesse geben sowie deren 1:1-Entsprechung mit unserer endlosen Folge ganzer Zahlen:

1	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**	**…**
↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	**…**

Die gezählte Folge ist in diesem Fall die der Kubikzahlen (1^3, 2^3 3^3, ...) der ganzen Zahlen – und wieder werden uns weder die gezählten Zahlen noch die Zählzahlen ausgehen. Beide Folgen sind von gleicher numerischer Mächtigkeit, da beide gegen denselben unendlichen Grenzwert konvergieren.

Als unser letztes Beispiel könnten wir schließlich vereinbaren, dass nur solche Zahlen gezählt werden, die mit einer "1" beginnen, gefolgt von einer ungeraden Anzahl Nullen:

10	**1000**	**100000**	**1000000**	**…**
↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	**…**

Egal, wie radikal unser "Ausdünnungsprozess" ist, die unendliche Reihe oberhalb unserer Doppelpfeile kann nie durch unsere Zählzahlen ausgeschöpft werden. Anders ausgedrückt, es gibt "genauso viele" Zahlen in der Folge 10, 1000, 100000, ... wie in der Folge 1, 2, 3 ... gibt. Dies scheint der Gipfel der Absurdität zu sein, aber es ist die unvermeidliche logische Konsequenz des Verfahrens, das wir angewendet haben, als wir die Buchstaben im Wort "universe" gezählt haben.

Es ist nun möglich, genau zu sagen, was wir meinen, wenn wir eine Menge von Zahlen Unendlich nennen. Wir definierten eine endliche Menge als eine, die nicht äquivalent zu einer echten Teilmenge ihrer selbst war. Und jetzt sagen wir:

Jede Menge, die äquivalent zu einer echten Teilmenge ihrer selbst ist, ist unendlich.

Und dieses Unendliche ist die erste Zahl in Cantors Menge der transfiniten Alephs. Es ist die $\aleph_0$ im transfiniten Reich des Zählens.

Das nächste Problem ist natürlich, wie wir zur nächsten transfiniten Zahl kommen, die "größer" sein sollte als unser traditionelles Unendliche. Es ist nicht allzu schwer, dass zu bewerkstelligen. Bevor wir damit beginnen, das nächste transfinite Aleph zu konstruieren, können wir schon ableiten, welche grundlegenden logischen Eigenschaft es haben sollte. Die folgende Tabelle von Eigenschaften, die endliche und unendliche Mengen gemeinsam und nicht gemeinsam haben, sollte helfen:

Art der Menge	Besonderheit	gemeinsames Merkmal
endlich	nicht äquivalent zu Teilmengen	abzählbar
unendlich	äquivalent zu Teilmengen	abzählbar

Diese Tabelle zeigt die logische Situation auf einen Blick. Endliche und unendliche Mengen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Äquivalenz-Eigenschaften, aber sie sind beide *abzählbar*. Das bedeutet, es gibt immer ein Verfahren zum Zählen der Elemente der verschiedenen Mengen. Und die Methode ist die gleiche. Es liegt nahe, dass, wenn wir eine dritte Art von numerischen Mengen finden wollen, die sich sowohl von den endlichen als auch den unendlichen unterscheidet, diese dritte Art das zu negieren hat, was ihren beiden Vorgängern *gemeinsam* ist. Um es positiv auszudrücken, die nächste transfinite Zahl muss *nicht-abzählbar* sein.

Um einen Eindruck von einem nicht-abzählbaren Aleph zu erhalten, lassen sie uns etwas transfinite Arithmetik betreiben. Sie hat, wie sie sehen werden, wenig Ähnlichkeit mit der der finiten Zahlen.

Addition: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

Multiplikation: $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

$n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (wobei n eine endliche Anzahl ist)

Es gilt auch: $(\aleph_0)^2 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

$(\aleph_0)^n = \aleph_0$

Es scheint keine Veränderung im Ergebnis dieser Operationen zu geben, aber das ist alles sehr trügerisch und irreführend. Denn das Ergebnis ist ganz anders, wenn wir folgendes versuchen:

$$(\aleph_0)^{\aleph 0}$$

Diese Gleichung erzeugt eine neue transfinite Zahl von höherer numerischer Mächtigkeit als die erste Zahl der Cantor-Folge. Diese zweite Aleph-Zahl ist nicht abzählbar.

Aber was bedeutet Nicht-Abzählbarkeit eigentlich? Wir werden es herausfinden, indem wir einigen von Cantors Gedankengängen folgen. Der gesunde Menschenverstand sagt uns, dass es mehr Brüche als ganze Zahlen gibt, denn zwischen zwei beliebigen Ganzen Zahlen gibt es eine unendliche Anzahl von Brüchen. Aber ach – der gesunde Menschenverstand ist ein Fremdkörper im Land des Unendlichen.

Obwohl die rationalen Brüche keine eindeutigen Nachbarn haben, entdeckte Cantor eine einfache, aber elegante Methode, um sie zu zählen und so ihre Abzählbarkeit zu beweisen. Er ordnete die Menge aller rationalen Brüche nicht in der Reihenfolge zunehmender Größe an (das ist unmöglich), sondern in der Reihenfolge ansteigender Zähler und Nenner in der folgenden Matrix:

1/1	**1/2**	**1/3**	**1/4**	**1/5**	**...**
2/1	**2/2**	**2/3**	**2/4**	**2/5**	**...**
3/1	**3/2**	**3/3**	**3/4**	**3/5**	**...**
4/1	**4/2**	**4/3**	**4/4**	**4/5**	**...**
5/1	**5/2**	**5/3**	**5/4**	**5/5**	**...**
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**

Jetzt kann die vertraute Eins-zu-eins-Entsprechung mit den ganzen Zahlen, die notwendig ist für den Vorgang des Zählens, erfolgen.

1/1	**2/1**	**1/2**	**1/3**	**2/2**	**3/1**	**4/1**	**3/2**	**2/3**	**...**
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	**...**

Folglich ist die Anzahl aller rationalen Brüche abzählbar und also auch von der Größenordnung von $\aleph_0$. Es ist vielleicht schwer zu glauben, dass es "nur" genau so viele rationale Brüche gibt wie ganze Zahlen, besonders angesichts der Tatsache, dass es eine unendliche Anzahl von Brüchen zwischen jeweils zwei ganzen Zahlen gibt, aber so ist die Mathematik des Unendlichen. Auch durch Hinzufügen aller rationalen Brüche zu unserem bisherigen Konzept von $\aleph_0$ haben wir noch nicht die arithmetische Dimension der Abzählbarkeit verlassen. Jedoch kam Cantors größter Triumph, als er zeigen konnte, dass die Klasse der rationalen und irrationalen Zahlen – also der so genannten reellen Zahlen – von höherer Größenordnung ist als die der abzählbaren $\aleph_0$. Die Klasse der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.

Sein Beweis basiert auf einer *reductio ad absurdum*. Er nahm an, dass die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählbar wären und mit den ganzen Zahlen in Paaren angeordnet werden können. Alle reellen Zahlen können als nicht-terminierende Dezimalbrüche ausgedrückt werden, und Cantor schrieb sie in der folgenden Matrix zum Zählen auf:

1↔0.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.
2↔0.	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	.	.	.
3↔0.	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	.	.	.
4↔0.	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	.	.	.
5↔0.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	.	.	.
6↔0.	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Wenn diese Matrix (wobei a_1, a_2, ...; b_1, b_2, ...; etc., Ziffern aus der Folge 0, 1, 2,..., 8, 9 sind) sowohl in horizontaler als in vertikaler Richtung unendlich ist, sollte sie *alle* reellen Zahlen enthalten und somit abzählbar sein. Aber genau das Gegenteil ist der Fall. Dieses Matrix veranschaulicht einen krassen Gegensatz zu der Aussage, dass alle Mengen abzählbar sind. Denn egal, wie unsere nicht-terminierende

Dezimalbrüche tatsächlich angeordnet sind, es ist immer möglich, eine unendliche Menge anderer Dezimalzahlen zu finden, die in dieser Matrix nicht vorkommen ... *obwohl diese selbst unendlich ist.* Die Frage ist: Wie können wir diese ausgelassenen Dezimalbrüche finden? Man könnte argumentieren: Da diese Menge unendlich ist und wir tatsächlich nur eine endliche Anzahl von einzelnen Dezimalbrüchen zählen können, könnten die, von denen wir annehmen, dass sie ausgelassen wurden, ja vielleicht noch auftauchen in den noch ungezählten unendlichen Weiten unser Matrix. Cantor konterte durch die Entdeckung seines berühmten "Diagonalverfahrens". Diese Technik erlaubt es uns zu zeigen, dass es reelle Zahlen gibt, die nicht in unserer Matrix vorhanden sind.

Bitte werfen sie einen weiteren Blick auf die Matrix der Dezimalbrüche. Sie werden feststellen, dass die Ziffern a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, f_6 durch eine diagonale Linie verbunden sind. Wenn wir jetzt einen zweiten Dezimalbruch (mit griechischen Buchstaben) konstruieren: α_1, β_2, γ_3, δ_4, ε_5, φ_6, … , wobei α_1 sich von a_1 unterscheidet, β_2 sich von b_2 unterscheidet, γ_3 sich von c_3 unterscheidet und so weiter, so wird sich diese neue Zahl von allen unendlichen Dezimalbrüchen in unserer ursprünglichen Menge in nur einer Stelle unterscheiden. Sie unterscheidet sich von der ersten Zahl in unserer Tabelle in der ersten Stelle, von der zweiten Zahl in der zweiten Stelle, von der dritten Zahl in der dritten Stelle und generell von jeder n-ten Zahl in der n-ten Stelle – egal wie weit in Richtung des Unendlichen wir n wählen würden. Es ist daher unmöglich, dass unsere "Diagonalzahl" in den noch unerforschten Weiten unserer Matrix auftauchen könnte. Die Diagonalzahl ist daher eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die *nicht* in unserer abzählbaren Matrix enthalten ist.

Es ist ferner möglich, diesen Vorgang unendlich oft zu wiederholen, beginnend mit a_2, a_3, a_4,... oder b_1, c_1, d_1,... und so nicht nur eine, sondern eine unendliche Folge von "Diagonalzahlen" zu erhalten. Es ist hiermit gezeigt, dass die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist und daher von höherer arithmetischer Mächtigkeit als das abzählbar Unendliche. Und da das gleiche für die Menge der reellen Zahlen zwischen 1 und 2 gezeigt werden kann, zwischen 2 und 3, zwischen 3 und 4, und so weiter, folgt daraus, dass die Menge der reellen Zahlen auch nicht-abzählbar ist.

Wenn dies der Fall ist, müssen wir zum ersten Mal in der Geschichte des menschlichen Denkens logische Unterscheidungen innerhalb des Bereichs des Unendlichen einräumen. Weil mindestens zwei verschiedene Arten des Unendlichen bestimmt wurden: die Größenordnung des abzählbar Unendlichen und die nicht-abzählbare Größenordnung des Unendlichen, die von höherer arithmetischer Mächtigkeit ist. Da die Menge der reellen Zahlen das so genannte Kontinuum bezeichnet, nannte Cantor die transfinite Zahl, die diese Menge repräsentiert, die transfinite Kardinalzahl $\mathfrak{c}$. Mit einigen weiteren Beweisen konnte Cantor zeigen, dass die Kardinalzahl aller eindeutigen reellen Funktionen f sogar von einer noch transfiniteren Ordnung als $\mathfrak{c}$ ist. So verfügen wir bereits über drei Alephs. Das Aleph des klassischen Unendlichen, welches Zenons Paradox produziert, das Aleph des Kontinuums und das Aleph der eindeutigen reellen Funktionen.

Die Arithmetik von $\mathfrak{c}$ ist der von $\aleph_0$ sehr ähnlich. Es ist interessant und bezeichnend, dass wenn $\mathfrak{c}$ mit $\aleph_0$ kombiniert wird, letzteres vollständig "geschluckt" wird. Somit haben wir[4]:

$$\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$$
$$\mathfrak{c} - \aleph_0 = \mathfrak{c}$$
$$\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$$
$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

Selbst die folgende Gleichung gilt:

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Aber im nächsten Fall ist das Ergebnis abweichend:

$$c^c = f$$

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die Zahl der transfiniten Alephs unendlich ist. So ist f keineswegs das höchste numerische Konzept, das wir ersinnen können. Wir wissen, dass eine unendliche Folge von höheren Alephs existiert, die gegen " Campbell's Limit " konvergiert, denn es kann nachgewiesen werden, dass die Menge S der Unterklassen jeder gegebenen Klasse C immer eine höhere Mächtigkeit als C besitzt. Das bedeutet im Fall unserer Zahl f, dass die Menge ihrer Untermengen von höherer transfiniter Ordnung ist als f selbst.[5] Dieser Prozess kann ad infinitum fortgesetzt werden. So viel zu dieser gewagten Kreation Cantors.

Der nächste Teil meines Artikels wird zeigen, dass Cantors Theorie der transfiniten Kardinalzahl c, dem Aleph des Kontinuums, eine echte Lösung für das Zenon-Paradox bietet.

Darüber hinaus bieten Cantors Schlussfolgerungen einen Zugang zu einem völlig neuen Konzept des Raumes und zu einer mathematischen Grundlage der interstellaren Raumfahrt. Einige der Schlussfolgerungen über die strukturellen Eigenschaften von Raum, Zeit und Materie, die aus der Theorie der Alephs gezogen werden müssen, sind so überraschend und so absolut jenseits unserer gegenwärtigen Denkgewohnheiten, dass ich der Versuchung nicht widerstehen kann, diesen Artikel mit der Feststellung zu beenden, dass interstellare Reisen an dem Tag möglich sein werden, an dem Achilles die Schildkröte *wirklich* überholt. Bis jetzt tut er dies nur in einem unabhängigen Rahmen der Natur – und gegen den angstvollen Protest unserer zu eingeschränkten Kräfte des Denkens. Aber der Tag interstellarer Weltraumfahrt wird kommen, wenn Achilles die Schildkröte sowohl in unseren Gedanken als auch in der Natur überholt. Mit anderen Worten, wenn wir das Geheimnis der Bewegung enträtselt haben. Die beiden folgenden Teile dieses Artikels sind mit der Absicht geschrieben worden, diesen Tag näher zu bringen.

*** * ***

Endnoten (Teil 1):

[1]:

Für die mathematisch fortgeschrittenen Leser hier einige Hinweise zum Grenzwertverfahren. Unsere ursprüngliche Gleichung für x wird zuerst auf den verallgemeinerten Ausdruck reduziert:

$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ Es wird dann gezeigt, dass $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$

(Wobei ε die kleinste gegebene Zahl ist, sie erreicht ihre "Grenze" nur für $n \to \infty$

Wir erhalten daher $n \xrightarrow{\lim} \infty$ und $\frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Wenn wir diesen Wert in unseren verallgemeinerten Ausdruck einsetzen, erhalten wir

$n \xrightarrow{\lim} \infty$ und $2 - 0 = 2$

Das bedeutet: x hat den Wert 2.

[2]:
Zenons Paradox beschäftigt sich mit dem Begriff des räumlichen "Kontinuum". Und es wurde schließlich von Weierstraß in seinem Beispiel einer "Stetigen Funktion" bewiesen, dass die Grenzwert-Methode der Infinitesimalrechnung nicht ausreicht, mit dem Problem des aktual Unendlichen fertig zu werden. (K. Weierstraß, "Erstes Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion", Journal für Mathematik, IX, 1875)

[3]:
Die Idee, dass es eine ultra-transfinite Grenze zu allen Alephs geben sollte, verdanke ich John W. Campbell. In einem Brief an mich vom 7. Juli 1953, nannte er sie die "transfinite Zahl im nicht-abzählbaren Raum der Imagination". Im Hinblick auf seine interessanten Ideen zu diesem Thema habe ich unser Symbol für die transfinite Grenze mit dem Index "i" bezeichnet. Das Symbol $\Im$ steht für den zweiten Buchstaben des hebräischen Alphabets: Beth.

[4]:
Aleph-null wird in der Regel in der transfiniten Arithmetik durch den Buchstaben a symbolisiert. Mathematiker schreiben gewohnheitsmäßig: $c + a = c$, etc. Ich habe $\aleph_0$ beibehalten, um anzuzeigen, dass die Aleph-Reihenfolge des abzählbar Unendlichen hergestellt wird, aber nicht die transfinite Mächtigkeit von c.

[5]:
Das Prinzip dieser transfiniten Induktion kann durch ein sehr elementares Beispiel dargestellt werden: Nehmen wir an, die Menge A enthält nur die drei Zahlen 1, 2, 3. Die Kardinalzahl unserer Menge ist 3. Jedoch sind die Untermengen von A (einschließlich der leeren Menge) (∅), (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3). Zählen sie sie, und sie werden feststellen, dass die Kardinalzahl der Menge S aller Untergruppen 8 ist.

Achilles und die Schildkröte

von Gotthard Günther

Die Relativität zeigt, dass nichts sich schneller als das Licht im Raum bewegen kann. Interstellare Raumfahrtschiffe werden erst möglich, wenn wir diese Einschränkung irgendwie überwinden können. Und eine Möglichkeit könnte einfach die sein, eine neue Antwort auf die tiefe und grundsätzliche Frage zu finden: "Was meinst du mit 'Bewegung'?"

– Teil 2 von 3 –

Die Lösung eines Rätsels oder Paradoxons hat in der Regel etwas von einer Ernüchterung. Die Spannung löst sich, und das Gefühl des aufgeregten Erstaunens vergeht. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist die Geschichte des gordischen Knotens. Als Alexander der Große Asien eroberte, fand er in der Stadt Gordium einen alten Streitwagen, dessen Joch mit einem Seil befestigt war, das mit einem komplizierten Knoten gebunden war. Das Seil war so kunstvoll verknotet, dass niemand jemals in der Lage gewesen war, den Knoten zu lösen. Außerdem gab es die Prophezeiung eines Orakels, dass derjenige, der als erster den Knoten lösen würde, über Asien herrschen solle. Alexander versuchte es, aber auch er scheiterte. Und so nahm er sein Schwert und "löste" den Knoten, indem er ihn in zwei Teile hieb.

Ich hörte diese Geschichte zum ersten Mal als kleiner Junge in der Schule. Aber schon damals hatte ich ein ungutes Gefühl: Diese Lösung erschien mir eher unordentlich. Kaum mehr als ein Betrug. Sicher, ich bekam die übliche Interpretation des berühmten Vorfalls: Es gibt Probleme, die der Intellekt nicht lösen kann und nur allzu oft kommt der Mensch in einer rätselhaften Sackgasse an, wo nur ein Akt der Kühnheit einen Ausweg verspricht. Diese Erklärung befriedigte mich überhaupt nicht! Wer hat denn zuerst gesagt, dass der gordische Knoten unlösbar sei, im exakten Sinne dieses Wortes? Nun, niemand hat das jemals getan. Die Geschichte sagt uns nur, dass es viele versucht hatten, aber niemandem war es gelungen. Das beweist nur, dass die Kandidaten nie gut genug waren. Und schauen sie sich Alexander selbst an! Er "löste" das Problem sozusagen praktisch, und bekam sein asiatisches Imperium. Aber es war das kurzlebigste Reich in der Geschichte der Menschheit. Es zerfiel an dem Tag, als er starb. Scheinbar war seine Methode zum Lösen des Knotens nur seine private Lösung, nicht gültig für irgend jemand anderen.

Die konventionelle Lösung von Zenons Paradoxon gehört zur gleichen Kategorie. Ich wies im ersten Teil darauf hin, dass das Rätsel der Unendlichkeit, welches mit dem Problem der Bewegung verbunden ist, unlösbar erscheint. Aber die Mathematiker entdeckten die Infinitesimalrechnung, ein besonderes Verfahren, das es uns gestattet, das materielle Konzept der aktualen Unendlichkeit aufzugeben. Sie ersetzten Unendlichkeit durch die operative Idee des Grenzwerts. Dies eröffnete zum ersten Mal einen Weg, in exakter mathematischer Weise zu zeigen, was jedes Kind schon aus unzähligen Erfahrungen gelernt hat, dass der schnelle Läufer immer den langsamen Läufer überholt. Praktisch gesprochen war die neue infinitesimale Methode von größter Bedeutung. Die moderne Technik und Industrie hätte sich einfach nicht ohne das Grenzwert-Verfahren entwickeln können. Aber dabei wurde kaum etwas gewonnen, insoweit es das exakte theoretische Konzept der Bewegung betraf. Sie, die Bewegung blieb das Geheimnis von einst und trotzte allen Versuchen, sie in strengen logischen Begriffen zu analysieren.

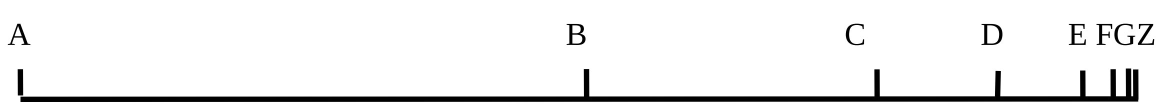
An dieser Stelle ist eine intellektuell gesunde und normale Person sehr stark geneigt zu sagen: "Und wenn schon. Wir verstehen Bewegung nicht? Der Kalkül von Newton und Leibniz erlaubt uns, sie nach Belieben zu *benutzen*. Und das ist alles, was wirklich zählt. Was willst du noch?" Genau, was wollen wir noch? Nun, wie wäre es mit interstellarer Raumfahrt? Die wollen wir sicherlich! Aber der erste Schritt in diese Richtung ist es, zu verstehen, dass alle bekannten Formen der Fortbewegung gänzlich und absurd nutzlos sind, wenn wir mit dem Problem konfrontiert sind: Wie überwinden wir interstellare Distanzen? Deshalb unsere große Frage: Gibt es noch andere, bisher unbekannte und strukturell andersartige Formen der Bewegung, für die es weder in unserem täglichen Leben noch in der Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems in ihren Umlaufbahnen Beispiele gibt?

Es ist absolut unmöglich, diese und verwandte Fragen zufrieden stellend zu beantworten, so lange wir kein exaktes rationales Verständnis davon haben, was Bewegung wirklich ist; – das heißt, sobald wir zu einer positiven Lösung von Zenons Problem gelangen, anstatt es durch Beseitigung seines entscheidenden Elements, der aktualen Unendlichkeit, zu umgehen. Die Infinitesimalrechnung hat nur gezeigt, in definierten mathematischen Begriffen, dass dieses mysteriöse X – genannt Bewegung – möglich ist. Na vielen Dank! Aber niemand hat das jemals bezweifelt. Andererseits haben 100 Jahre symbolische Logik unseren Geschmack verdorben. Wir wollen eine Lösung des Zenon'schen Paradoxons, in welcher das Problem der Unendlichkeit nicht sorgfältig beseitigt ist, sondern wo die Unendlichkeit selbst an der Lösung beteiligt ist und die Erklärung des Rätsels der Bewegung liefert. Es ist ein Glück für uns, dass Cantors Theorien nahe legen, dass es ein transfinites Konzept von Bewegung gibt, und dass diese Cantor'sche Idee von der Änderung der Lage eines Objekts im Raum die mathematische Grundlage aller zukünftigen interstellaren Raumfahrt sein könnte. Es wird sich für uns auszahlen, einen letzten Blick auf die Theorie der Grenzwerte und ihre logischen Mängel in Bezug auf Cantors Arithmetik der Alephs zu werfen.

Die Theorie des differentiellen Grenzwertes bedeutet nur, dass es den betreffenden Größen *erlaubt* ist, sich bis unterhalb jeder gegebenen Zahl zu verkleinern. Es gibt kein Ende in diesem Prozess. Aber die Tatsache, dass es ihr gestattet ist, sich der Grenze des unendlich Kleinen zu nähern, bedeutet nicht, dass sie diese tatsächlich erreicht. Ganz im Gegenteil, die Tatsache, dass der Prozess endlos ist, fordert per definitionem, dass die Unendlichkeit niemals erreicht wird. Ansonsten würde dieser endlose Prozess ein Ende haben, was ein Widerspruch in sich wäre. Folglich wird jeder *tatsächliche* Raumabschnitt, der durch dieses mathematische Verfahren festgelegt wird, trotzdem eine *endliche* Ausdehnung haben. Newton war das bereits klar. Erlauben sie mir, eine wichtige Aussage aus dem lateinischen Text seines "Tractatus de Curvata Curvarum" zu übersetzen. Die besagt: "Ich habe beabsichtigt, zu zeigen, dass es nicht notwendig ist, in der Fluxionsrechnung unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen."[1] Dies scheint durch praktische Erfahrungen in der modernen experimentellen Physik getragen. Einer der führenden Physiker unserer Zeit schrieb erst kürzlich: "Die neuesten Entwicklungen der Kernphysik legen nahe, dass eine 'minimale Länge' existiert, unterhalb derer keine weitere Abnahme möglich ist."[2]

Es läuft alles auf die wichtige Tatsache hinaus, dass unser traditionelles nicht-Cantor'sches System der Mathematik den Raum als eine *quantisierte* Struktur betrachtet. Der Raum ist sozusagen aus einzelnen Raum-Quanten zusammengesetzt: kleine, diskrete Einheiten mit einer echten Ausdehnung. Die Grenzwert-Theorie erlaubt uns lediglich anzunehmen, dass diese Raum-Quanten so klein sein können, wie wir wollen.

Wenn wir dies im Hinterkopf behalten, wird es verständlich, warum wir gezwungen sind, über das Zenon'sche Paradoxon nachzudenken, bei dem Achilles die Schildkröte niemals überholen kann. Um uns das Verständnis zu erleichtern, zeichnen wir hier noch einmal unsere Rennstrecke auf:



Achilles beginnt bei A, und die Schildkröte beginnt das Rennen zugleich bei B. Das Ziel ist bei Z, ein Punkt, den beide Wettkämpfer gleichzeitig erreichen sollten, da Achilles doppelt so schnell läuft wie das Reptil. Wenn von uns verlangt wird, anzunehmen, dass der Raum quantisiert ist, dann ist Zenons Argumentation gültig – von nun an bis in alle Ewigkeit. Wie das? Nun, lassen sie es uns anders formulieren und es wird evident.

Zenon argumentiert, dass die beiden Wettkämpfer während des Rennens exakt die gleiche Anzahl von Positionen einnehmen müssen. Das folgende Muster von 1:1-Beziehungen zeigt, was Zenon damit meint:

(I) Achilles	A	B	C	D	E	F	G	… Z–1
(II) Tortoise	B	C	D	E	F	G	H	… Z
(III) Anzahl der Positionen	1	2	3	4	5	6	7	…

Wie man leicht sehen kann, ist Achilles für eine beliebige Anzahl von Positionen n immer unverändert eine Position hinter dem Reptil. Wenn unser Held die Schildkröte fangen wollte, müsste er während eines gleichen Zeitraums eine Position mehr besetzen. Dies ist offensichtlich unmöglich, das müssen wir Zenon zugestehen. Die Abstände zwischen der Schildkröte und ihrem Verfolger können schrittweise immer kleiner und kleiner werden, bis sie die Größenordnung eines Raum-Quants erreichen. Aber eine weitere Verkleinerung ist nicht möglich. Daraus folgt, dass die Anzahl solcher Quanten oder physikalischer (nicht mathematischer!) Punkte zwischen A und Z endlich ist. Und in dem Fall einer endlichen Menge gilt, dass eine Teilmenge einer Folge nicht numerisch äquivalent mit der gesamten Folge ist (vgl. Teil 1). Achilles muss mindestens ein Raum-Quant hinter der Schildkröte bleiben, weil für eine endliche Folge die Positionen Z und Z-1 nicht identisch sind.

Unter diesen Umständen bleibt keine Alternative mehr übrig, als davon auszugehen, dass die "kleinsten" Segmente der Strecke AZ keine messbare Länge mehr haben. Sie müssen dimensionslose Punkte sein. Aber nicht einmal die Summe einer unendlichen Folge solcher Punkte würde ein Liniensegment irgendeiner messbaren Ausdehnung erzeugen. Achilles, der von Punkt 1 startet – bezeichnet mit A – und sich zu den darauf folgenden Punkten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ... weiter bewegt, würde nie auch nur irgend eine Distanz zurücklegen. Da es keinen Abstand zwischen den Punkten gibt, und die Punkte selber keine räumliche Ausdehnung haben. Alles, was Achilles mit seinem schnellsten Lauf erreichen könnte, wäre, bei A zu bleiben.

Erinnern Sie sich an die Geschichte, in der Alice mit der Roten Königin läuft? Schauen wir, was Lewis Carroll dazu zu sagen hat:

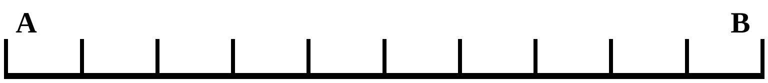
> "Und sie liefen so schnell, dass sie schließlich durch die Luft zu gleiten schienen, kaum den Boden mit den Füßen berührend, bis sie plötzlich, als Alice schon ganz erschöpft war, anhielten, und sie sich auf der Erde sitzend wieder fand, atemlos und schwindlig ... Alice sah sich höchst überrascht um. "Nanu, ich glaube gar, dass wir die ganze Zeit unter diesem Baum geblieben sind. Alles ist ja so, wie es war!" "Natürlich," sagte die Königin. "Was hast du denn gedacht?" "Na, in *unserem* Land," sagte Alice, noch ein bisschen außer Atem, "kommt man im allgemeinen irgend woanders hin – wenn man lange Zeit sehr schnell rennt, so wie wir es gemacht haben." "Ein langsames Land!" sagte die Königin. "Nun, *hier* muss man nämlich so schnell rennen, wie man kann, um auf der Stelle zu bleiben. Wenn man irgendwo anders hin will, muss man mindestens doppelt so schnell rennen!" [*]

Es scheint, Achilles und Alice rennen in einem sehr schnellen Land. Ihr Lauf bringt sie nirgendwohin.

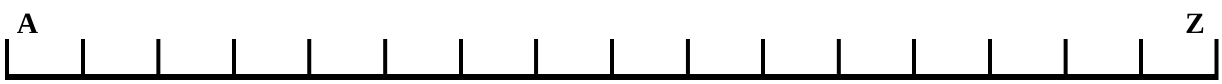
Bisher sind wir naiv davon ausgegangen, dass die Anzahl der Punkte auf unserer Strecke AZ – der Rennstrecke – entweder endlich oder unendlich ist. Aber wir sollten nicht vergessen, dass die ganze Alternative "endlich-unendlich" ausschließlich zum Cantor'schen Zahlensystem von Aleph-null gehört. Daraus folgt, dass unsere gesamte Argumentation bis zu diesem Zeitpunkt auf der stillschweigenden Annahme beruht hat, dass die Struktur der räumlichen Ausdehnung – das Kontinuum – adäquat in Ausdrücken von $\aleph_0$ definiert werden kann. Jeder, der behauptet, dass sich das Zenon'sche Paradoxon als ein Grenzwertproblem lösen lässt, macht genau diese Annahme.

Die klassische Alternative von Endlich und Unendlich war natürlich bis vor kurzem unvermeidlich, weil man glaubte, dass das traditionelle Konzept des einfachen Unendlichen die Obergrenze für alle numerischen Systeme darstellt. Cantors Entdeckungen haben diesen Glauben erschüttert und wir wissen jetzt – seit rund 75 Jahren –, dass die arithmetischen Konzepte von $\aleph_0$ nicht ausreichen, uns ein richtiges Bild von den strukturellen Eigenschaften des Kontinuums zu geben. Wir sind uns der Tatsache bewusst, dass das Kontinuum nur mit Hilfe des über-abzählbaren Systems der reellen Zahlen beschrieben werden kann. Dieses System ist nicht nur infinit, es ist transfinit und von der Größenordnung der Kardinalzahl $\mathfrak{c}$. Unter diesen Umständen ist es klar, dass das allgemeine Problem der Bewegung in seiner Lösung von Natur des Kontinuums abhängt. Wir sind verpflichtet, die Arithmetik des überabzählbar transfiniten $\mathfrak{c}$ auf sie anzuwenden.

Selbstverständlich sollte unsere nächste Frage sein: Was ist der Unterschied zwischen der Arithmetik der abzählbaren und nicht-abzählbaren Systeme, wenn diese zum Messen von Distanzen im Raum verwendet werden? Eine elementare Zeichnung soll uns dabei wieder helfen. Es seien



und



zwei Strecken, die im Hinblick auf vorgegebene Maßeinheiten gemessen werden sollen. Und es sei keine Änderung der Maßeinheit zwischen AB und AZ gestattet. Wenn wir abzählbare Zahlen für unseren Zweck benutzen, werden wir feststellen, *dass es eine eindeutige Beziehung zwischen der Anzahl von Mess-Einheiten und der Länge eines Liniensegments gibt.* In anderen Worten: Der Abstand AB ist kürzer in Bezug auf die Maßeinheit als der Abstand AZ. Um zu zeigen, was wir meinen, könnten wir es auch ontologisch – existenziell formulieren: Es gibt mehr Raum-Quanten zwischen A und Z als zwischen A und B.

Diese Interpretation unseres Messverfahrens ist jedoch unzulässig, wenn wir die Strecken AB und AZ in Form von über-abzählbaren Zahlen definieren. Wir haben in unserem vorhergehenden Artikel gesehen, dass die Größenordnung von allen reellen – nicht abzählbaren, also überabzählbaren – Zahlen zwischen 0 und 1 bereits von der transfiniten kardinalen Größenordnung von $\mathfrak{c}$ ist. Das gleiche gilt für alle reellen Zahlen zwischen 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4..., oder 0 bis 2, 0 und 3, 0 und 4... In der Tat besteht das gleiche quantitativen Verhältnis generell zwischen 0 und n, wobei n unbegrenzt hoch werden darf. Kurz gesagt, eine Linie von einem Trillionstel Millimeter (10^{-18}mm = 10^{-21}m) Länge enthält – gemessen in reellen Zahlen – genau so viele Punkte wie eine andere Linie, die sich von der Erde bis zum letzten kaum sichtbaren Nebels des Universums erstreckt. Sobald wir die Arithmetik der überabzählbaren Zahlen verwenden, werden wir feststellen, *dass es keine Beziehung zwischen der Anzahl von reellen Punkten auf einer Linie und ihrer Länge gibt*.

Sobald wir diese Einsicht erreicht haben, sind wir endlich bereit für eine echte Lösung des Problems der Bewegung, wie es in dem Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte exemplifiziert ist. Es ist unmöglich, das Zenon'sche Paradoxon mit Begriffen eines abzählbaren Systems von Kardinalzahlen zu lösen. Achilles würde das Tier vor ihm nie einholen, wenn es eine starre und unveränderliche Beziehung zwischen unserer Methode des Zählens und der objektiven Struktur des Raumes geben würde. Mit "unveränderliche Beziehung" meine ich eine Beziehung mit der Wirkung, dass die Anzahl der Punkte, die wir zählen könnten – egal welche Technik des Zählens wir benutzen würden – *immer* die Länge der gemessenen Strecke kennzeichnen würde.

Zenons These, dass Achilles so viele Positionen einnehmen müsse wie die Schildkröte, ist und bleibt unangreifbar. Ebenso wahr ist, dass er eine größere Distanz zurücklegen muss als das Reptil. Und wenn die größere Distanz mehr reelle Punkte enthalten würde als die kleinere, dann wäre es unmöglich für ihn, aufzuholen. Dies wäre in der Tat der Fall, wenn die endgültige Realität unseres Raum-Zeit-Kontinuums adäquat mit Begriffen *abzählbarer* Zahlen beschrieben werden könnte. Zenon entdeckte sein Paradoxon, weil er nur die abzählbaren Zahlen des Systems von Aleph-null benutzte. Indem er seine Geschichte von Achilles und der Schildkröte erzählt, demonstriert er die Unzulänglichkeit des klassischen Zahlbegriffs. Die paradoxe Situation, die sich zwischen Achilles und dem Tier entwickelt, zeigt deutlich, dass das Problem der Bewegung im Raum für seine Behandlung ein ganz anderes Konzept der Zahl benötigt. Bewegung ist ein Problem des Kontinuums und daher in seiner allgemeinen Form nur behandelbar durch ein arithmetisches System transfiniter Größenordnung. Zenon konnte das natürlich nicht wissen. Er zog daher aus seiner absolut richtigen These, nämlich dass während des Rennens *Achilles die gleiche Anzahl an Positionen besetzen muss wie sein Konkurrent*, die fehlerhafte Schlussfolgerung, dass dieser auf diese Weise nicht weiter als die Schildkröte vorankommen könne. Seine Schlussfolgerung wäre nur richtig gewesen, wenn die Strecke von A bis Z tatsächlich mehr Punkte – reelle Zahlen – enthalten würde als die kürzere Strecke von B bis Z. Das aber ist, wie wir jetzt wissen, nicht der Fall!

Daher ist die Lösung von Zenons Problem: *In der Arithmetik der überabzählbaren Zahlen nimmt Achilles zwischen A und Z nicht mehr und nicht weniger Positionen ein als die Schildkröte zwischen B und Z.* Damit ist es für Achilles möglich, eine längere Strecke als das Tier zurückzulegen, obwohl er während des Rennen die gleiche Anzahl von Positionen einnimmt wie sein Gegenspieler – worauf Zenon zu Recht hingewiesen hat.[3]

Dies lehrt uns eine grundlegende Lektion für jede künftige interstellare Raumfahrt: Die objektive Distanz zwischen zwei Punkten im Raum, sagen wir, zwischen der Erde und dem Krebsnebel, kann niemals durch das Zählen der absoluten Anzahl der Punkte zwischen diesen bestimmt werden. Egal wie kurz oder wie lang eine Strecke ist, sie enthält immer die gleiche Anzahl von reellen Punkten, und die fragliche Anzahl ist immer die transfinite Kardinalzahl c. Die folgende Feststellung könnte selbst für den geneigten Leser schwierig zu verdauen sein, aber sie ist genauso wahr: Gemessen im System der reellen Zahlen ist der Abstand zwischen Erde und Krebsnebel weder länger noch kürzer als das Raum-Intervall zwischen Erde und Mond. Wir tun uns natürlich schwer mit dieser revolutionäre Idee, weil wir uns in Tausenden von Jahren daran gewöhnt haben, Entfernungen ausschließlich kraft der abzählbaren Ordnung der Kardinalzahlen zu messen. Aber solange wir nur abzählbare Zahlen zählen, können wir weder von Raum noch von Bewegung eine richtige Vorstellung entwickeln, weil beide Phänomene das aktual Unendliche beinhalten.

Wie wenig wir über die grundlegende Struktur des Raumes im Allgemeinen wissen, kann aus dem phantastischsten Ergebnis abgeleitet werden, dass Georg Cantor gezwungen war, zu akzeptieren, als er die Eigenschaften der reellen Zahlen untersuchte. Wir haben im vorhergehenden Artikel gelernt, dass

$$\mathsf{c}^2 = \mathsf{c} \cdot \mathsf{c} = \mathsf{c} \tag{1}$$

gilt. Diese Formel sieht freilich harmlos aus. Sie scheint trivial zu sein. Aber sie enthält ontologisches Dynamit, denn sie bedeutet, dass jede Gerade – ob endlich oder unendlich – genau so viele reelle Punkte enthält wie das Quadrat über sie. Wir werden die Demonstration dieser erstaunlichen Beziehung zwischen einer eindimensionalen Linie und einer zweidimensionalen Ebene überspringen – die sich übrigens aus der Nutzung der kartesischen Koordinaten ergibt – und gehen zur nächsten Formel über

$$\mathsf{c}^3 = \mathsf{c}^2 \cdot \mathsf{c} = \mathsf{c} \tag{2}$$

Übersetzt in ontologische Begriffe heißt dies nicht mehr und nicht weniger, als dass die Anzahl von reellen Punkten des kürzesten Streckenabschnitts zahlenmäßig gleich ist der Anzahl aller reellen Punkte in einem unendlichen dreidimensionalen Universum.

Als Cantor 1877/78 dieses fast unglaubliche Ergebnis zu veröffentlichen versuchte, weigerte sich der Herausgeber der mathematischen Zeitschrift, seinen Artikel zu drucken. Es bedurfte der Intervention des Mathematikers Karl Weierstraß, der bereits weltweit anerkannt war, um Cantors Arbeit auf die

Seiten des Journals zu bekommen.[4]

Allerdings ist dies noch nicht alles. Wie wir weiter aus unserem ersten Artikel wissen, gilt

$$c^n = c \qquad (3)$$

Dies bedeutet, dass alle reellen Punkte eines beliebigen n-dimensionalen Universums – wobei n eine endlichen Anzahl ist – von der gleichen Größenordnung sind wie die Anzahl aller reellen Punkte unserer kleinsten Strecke. Und schließlich haben wir

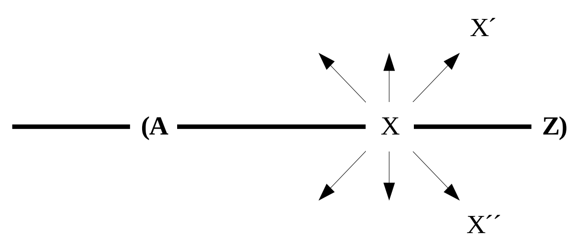
$$c^{\aleph_0} = c \qquad (4)$$

Im Klartext, die gleiche Relation gilt sogar noch in einem Universum mit einer unendlichen Anzahl von Dimensionen.

Ich werde nicht die weit reichenden Auswirkungen der Formeln (3) und (4) in diesem Artikel diskutieren. Formel (2) wird, so weit es unser unmittelbares Problem betrifft, ausreichend sein. Entsprechend (2) ist es möglich, die Punkte der kleinsten denkbaren Strecke und alle räumlichen Punkte unseres dreidimensionalen Universums in eine eins-zu-eins Beziehung zu setzen. Unsere Strecke hat "so viele" Punkte wie der gesamte metagalaktische Raum. Anders ausgedrückt: *Die überabzählbare Ordnung des transfiniten c lässt räumliche Dimensionen und Entfernungen verschwinden!* Es sollte jedoch angemerkt werden, dass das eindimensionale Abbilden aller Raumpunkte nur diskontinuierlich geschehen kann. Es gibt keine kontinuierliche ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten einer Linie und den Punkten, die die beiden anderen Dimensionen ergeben. Das bedeutet, das transfinite System der reellen Zahlen liefert uns ein Bild des Raumes, dass ohne Grenzen schrumpfen darf. Aber dabei behält es auch in der Form eines Liniensegments bestimmte Merkmale bei, die anzeigen, dass es potentiell weit mehr ist als eine eindimensionale Sequenz. Der diskontinuierliche Charakter der ein-eindeutigen Beziehung zwischen einem einfachen Liniensegment und dem Raum weist auf die Möglichkeit hin, dass unsere Linie jederzeit – vorausgesetzt, die notwendigen metrischen Bedingungen bestehen – in ein dreidimensionales räumliches Kontinuum "explodieren" kann.

Da es fast unmöglich ist, beim ersten Lesen die nahezu unglaublichen Konsequenzen der Formel (2) zu begreifen, werde ich versuchen, sie mit ein paar Worten zu skizzieren. Erstens, da die kürzeste und die längste Strecke beliebig austauschbar sind – wenn sie in Bezug auf transfinite Zahlen gemessen wird – ist es metrisch möglich, jede Entfernung von jedem beliebigen Punkt aus zu erreichen, indem man eine vernachlässigbar kleine Länge, gemessen in finiten Zahlen, durchquert. Aber die zweite Konsequenz ist noch phantastischer. Entsprechend der klassischen Konzepte der Geometrie kann man – wenn man sich entlang einer eindimensionalen Linie bewegt – nur Punkte erreichen, die sich auf genau dieser Linie befinden. Diese Beschränkung gilt nicht in Bereichen, in denen Formel (2) gültig ist. Wenn eine endliche Strecke transfinit ein dreidimensionales Kontinuum repräsentiert, dann muss sie eine transfinite Anzahl an Punkten "enthalten", welche – räumlich gesprochen – nicht im selben Segment liegen, wo wir sie auffinden. Das klingt nach komplettem Wahnsinn. Aber vergessen sie nicht, wenn sie die Blaupausen eines Düsenjets oder eines Fernsehgeräts Moses, Alexander dem Großen oder Sitting Bull vorgelegt hätten, würden diese Herren auch entschieden haben, dass ihre Zeichnungen nichts anderes sein können als die wahnsinnigen Produkte eines hoffnungslos kranken Geistes. Also machen wir uns nichts vor, Formel (2) bedeutet, dass jede Strecke Punkte "enthält", die sich nicht auf ihr befinden.

Nehmen wir an, wir reisen entlang einer Linie XZ, und wir gestatten es der Linie an einer bestimmten Stelle X in eine dreidimensionale Kontinuumsposition X zu "explodieren", die, wenn vereinigt, alle für die "Explosion" erforderlichen Punkte enthält – dann könnten wir, anstatt am Punkt X am Punkt X' oder X'' ankommen, von denen keiner der beiden auf unserer Linie liegt.



Es ist kaum möglich, die Wichtigkeit dieser transfiniten Eigenschaften des Raumes für die Theorie und Praxis interstellarer Raumfahrt zu überschätzen. Wir beginnen heutzutage zu erkennen, dass unsere gegenwärtigen mathematische Methoden uns kein adäquates Bild der dimensionalen Eigenschaften von Raum und Zeit in unserem Universums liefern. Sie beschreiben bestenfalls die Eigenschaften der Materie *in* unserer Welt, aber nicht die Prinzipien der Ausdehnung *per se*. Daher versagen sie vollständig, wenn sie gefordert sind, die grundlegenden Eigenschaften des vierdimensionalen Kontinuums von Raum und Zeit zu beschreiben, in welches unsere physische Existenz eingebettet ist.

Zenons Paradoxon macht deutlich, dass unsere herkömmlichen Vorstellungen von Entfernungen und Längen von unserem vertrauten Wissen über physische Körper abgeleitet sind. Sie passen in der Tat auf Körper, und in der Regel auf alle Formen der materiellen Existenz, die eine quantisierte Struktur haben, aber sie passen nicht auf eine andere Form von Existenz: der Existenz der Kontinua von Raum und Zeit.

Wenn Achilles die Schildkröte in unserer heutigen Welt des Aleph-null überholen könnte – das heißt, wenn wir das Problem der Bewegung durch unser klassisches "geometrisches" Konzept der Distanz *denken* könnten –, dann würde das gleiche Konzept auch für interstellare Distanzen gelten. Es ist nicht wahrscheinlich, dass wir unter diesen Umständen jemals die Sterne erreichen. Denn die Idee einer Reise, die Jahrhunderte dauern würde, um nur unseren nächsten Nachbarn Proxima Centauri zu erreichen, ist absurd. Und wie könnten galaktische Imperien existieren – von der Art, wie sie Isaac Asimov in seinen Foundation-Romanen beschrieben hat –, wenn eine Nachricht vom einen Ende unserer Galaxis zum anderen etwa 100.000 Jahre braucht?

Doch interstellare Reisen sind, theoretisch gesprochen, eine unbestreitbare Gewissheit, denn das Geheimnis der Bewegung ist, dass sie nicht auf der Grundlage von quantisierten physikalischen Voraussetzungen stattfindet, wo die Entfernungen sich allmählich zu fast unermesslichen Größenordnungen anhäufen. Jeder weiß aus seiner eigenen praktischen Erfahrung, dass Achilles das Reptil erwischt – obwohl die Theorie uns sagt, dass er das unmöglich tun kann. Dies ist der unwiderlegbare Beweis, dass das quantisierte Denken von $\aleph_0$ nicht auf die Probleme des Raumes anwendbar ist. Das Kontinuum ist von transfiniter Ordnung, und hier werden unsere traditionellen Vorstellungen von Ausdehnung, Entfernung und Dimension ungültig und müssen neu definiert werden.

Daher zwingt das bevorstehende Weltraumzeitalter die Menschheit zu einer Revolution des Denkens. Ich möchte einige Aussagen von John W. Campbell, Jr. zitieren, die aus einem Brief vom 24. Juni 1953 an den Schreiber dieser Zeilen stammen. Wir diskutierten Cantors Theorie der transfiniten Alephs und unser Herausgeber schrieb[5]:

> "To date, I feel that no satisfactory correlation of Cantor's ideas with the real universe has been published.
>
> Some of the implications of Cantor's work are most disturbing to the mind orientated entirely on the quantized thinking implicit in two-valued logic, in a digital-ordered system of thinking, and in quantized physics …
>
> One of the things implicit in Cantor's work is that if any line contains Aleph-n points, then if we accept the proposition 'Things equal to the same thing are equal to each other', we must also accept that a line of any length is equal to a line of any other length! The concept 'greater than' as applied to line segments must then be re-examined.
>
> If, as Cantor's concepts imply, 'length' is a fiction derived from a limited operational method, the 'distance' between two points is purely a matter of measurement!
>
> It seems to me that there are many indications that the whole concept of geometry is a special case of something far more general, in which Cantor's concept of Aleph-null becomes simply the first-order unit.
>
> And in that system, by recognizing that distance is purely a matter of operational method … why, the stars are as near as we wish them."

Bitte vergleichen sie diese Bemerkungen mit dem Ergebnis unseres vorhergehenden Artikels über Achilles und die Schildkröte. Wir haben gelernt, dass die Existenz – und alle Existenz ist physische Existenz – nur in Begriffen des quantisierten Denkens gefasst werden, nur in digital geordneten Zahlensystemen gemessen werden und in quantisierter Physik objektiv erklärt werden kann. Aber wir haben auch gelernt, dass alle diese Methoden scheitern, wenn wir das Problem des Raumes angehen wollen. Das auffälligste Zeichen dieses Scheiterns ist die Existenz von Cantors Formel (4), also:

$$c^{\aleph_0} = c$$

nach der die kleinste Strecke "so viele" reelle Punkte hat, wie es in einem unendlichen Universum mit einer unendlichen Anzahl von Dimensionen gibt. Da erhebt sich natürlich die Frage: Wie klein darf unsere Strecke werden? Es gibt nur eine *logische* Antwort: So klein, wie wir sie messen können. Und wie klein kann man sie messen? Diesmal gibt es nur eine *physikalische* Antwort: Bis hinab in die Größenordnung eines Raum-Quants. Es ist uns daher gestattet zu sagen, dass ein einzelnes Raum-Quant, welches eine absolute Einheit im Hinblick auf abzählbare Zahlen ist, so viele Punkte enthält wie jedes n-dimensionale Universum – wobei n ohne Limit anwachsen darf.

Lassen sie uns dieses wichtigste Ergebnis noch einmal unter einem anderen Aspekt neu formulieren. Es folgt aus (4), dass unser Verfahren des Messens durch allmähliche Akkumulation von Längen-Einheiten nur dann gültig ist, wenn es auf physische Seinszustände angewendet wird. Es ist bedeutungslos, wenn es auf das angewendet wird, was alle *physische* Existenz "*enthält*", also den leeren Raum *per se*. Das Konzept der Distanz ist nur sinnvoll in Bezug auf Substanz in ihren beiden Erscheinungsformen als Materie und Energie. Es beschreibt nichts in Bezug auf die Leere des Raumes. In streng physikalischen Begriffen gesprochen können wir also sagen: Raum *per se* existiert nicht. Aber das ist keineswegs alles. Wir werden noch etwas mehr lernen, durch einen Blick auf die jüngste Geschichte der Physik.

Newton glaubte noch an eine unabhängige "physische" Existenz der absoluten Leere des Raumes *per se*. Berühmt ist sein Experiment mit einem rotierenden Eimer Wasser. Jeder weiß, dass, wenn ein Eimer rotiert, das Wasser eine konkave Oberfläche annehmen wird. Dies ist die Wirkung einer Zentrifugal-"Kraft", ausgelöst durch die Drehung und Newton interpretiert diese Kraft als das Ergebnis der Bewegung relativ zum absoluten oder leeren Raum. Die Gültigkeit seiner Argumentation wurde zuerst von Ernst Mach angezweifelt. Aber der Beweis dafür, dass Newton sich geirrt haben muss, wurde erst erbracht, als Michelson und Morley ihr bekanntes "Äther-Drift"-Experiment durchführten und Einstein seine richtige Interpretation entdeckte. Wenn sich die Erde durch den absoluten Raum bewegt, dann sollte die beobachtete Lichtgeschwindigkeit größer sein, wenn sich der Beobachter in Richtung der Lichtquelle bewegt und kleiner, wenn er sich von ihr weg bewegt. Nach unseren klassischen Konzepten sollte dies so sein, denn im ersten Fall muss man die Geschwindigkeit des Beobachters zur Geschwindigkeit des Lichts *hinzufügen* und im zweiten Fall muss die Geschwindigkeit des Beobachter *abgezogen* werden, weil das Licht ihn einholen muss. Aber als Michelson sein berühmtes Experiment durchführte, konnte keine solche Veränderung in der relativen Lichtgeschwindigkeit beobachtet werden. Egal, ob sich der Beobachter in Richtung der Lichtquelle oder von ihr weg bewegte, die Lichtgeschwindigkeit blieb konstant bei 299.792,5 Kilometer pro Sekunde (im Vakuum).

Klassisch gesehen ist dies vollkommen absurd. Lassen sie mich das mit einem trivialen Beispiel unseres Alltags illustrieren. Wir nehmen an, es gibt zwei Autos auf der Autobahn, beide mit einem fehlerfrei arbeitenden Tachometer ausgestattet. Der erste Wagen fährt mit einer Geschwindigkeit von genau 80 km/h. Und das zweite Auto mit 82km/h. Es liegt nahe, dass der zweite Fahrer nach und nach den ersten überholen wird, und wenn er das tut, wird er mit genau 2km/h am ersten Auto vorbeiziehen. Aber das negative Ergebnis des "Äther-Drift" Experiments legt nahe, dass der zweite Fahrer das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von genau 82km/h überholt. "Aber das ist unmöglich!" werden sie sagen. "Wenn die relative Geschwindigkeit der beiden Fahrzeuge im Moment des Überholen 82km/h ist, und das erste hat 80km/h fährt, dann muss das zweite Auto mit einer ursprünglichen Geschwindigkeit von 162km/h auf der Straße fahren. Es ist unmöglich, dass der Tacho des zweiten Autos 82km/h anzeigt. Aber falls er das tut, ist es ganz ausgeschlossen, dass die Geschwindigkeit der beiden bewegten Objekten auf unserer Autobahn relativ zueinander 62km/h beträgt. Sie ist exakt 2km/h." Das Argument ist völlig korrekt. Die Anwendung des Michelson-Morley-Experiments auf unsere Autobahn-Situation ist Unsinn. Denn es gibt eine Autobahn und beide Wagen haben zwei Geschwindigkeiten: eine "absolute" bezüglich der Autobahn, die durch die jeweiligen Tachometer angezeigt wird und eine relative jeweils zum anderen. Und ihre relative Bewegung hängt immer von ihren "absoluten" Geschwindigkeiten ab. Sie kann durch eine einfache arithmetische Prozedur berechnet werden. Im Falle eines Überholens subtrahieren sie die kleinere Geschwindigkeit von der größeren. Ist es eine Kollision, addieren sie die beiden Geschwindigkeiten miteinander.

Aber es gibt "keine Autobahn im Himmel!" Dies war Einsteins Lösung, als er das negative Ergebnis des "Äther-Drift"- Experiments mit unseren traditionellen Vorstellungen von Bewegung in Einklang zu bringen versuchte. Michelson erwartete ein positives Ergebnis für sein Experiment, weil er annahm, dass sowohl das Licht als auch sein Beobachter eine absolute Geschwindigkeit in Bezug auf den absoluten Raum (Äther) und in der absoluten Zeit haben würden, zusätzlich zu ihren relativen Geschwindigkeiten. Aber das Experiment verlief negativ, und Einstein schloss, dass es nur eine Erklärung für dieses Ergebnis geben kann: Absolute Kontinua haben keine unabhängige physikalische Existenz.

Einstein bestand darauf, dass wir zwischen Raum und Räumlichkeit sowie zwischen Zeit und Zeitlichkeit unterscheiden sollten. Räumlichkeit und Zeitlichkeit sind die grundlegenden Eigenschaften von physikalischen Ereignissen. Absoluter Raum und absolute Zeit sind jedoch bloße theoretische Abstraktionen ohne objektive Realität. Es liegt nahe, dass man abstrakte Begriffe nicht in Zentimetern oder Sekunden messen kann. Andererseits, räumliche und zeitliche Eigenschaften physikalischer Objekte oder Prozesse können gemessen werden. Und das ist, nebenbei bemerkt, das wissenschaftliche Kriterium der realen Existenz. Nichts kann als objektiv real in unserem Universum angesehen werden, solange es nicht direkt oder indirekt gemessen werden kann.[6] Aber leerer Raum und ereignislose Zeit sind nicht messbar. Ihre "Eigenschaften" sind immer die gleichen, unabhängig von der Geschwindigkeit oder der Position des Beobachters, der sich durch sie hindurch bewegt. Um es anders auszudrücken: Es ist unmöglich, Entfernungen im absoluten Raum oder Intervalle in absoluter Zeit zu messen.

Soweit es die Zeit betrifft, sind die Leser von Science-Fiction-Zeitschriften ziemlich vertraut mit dem Konzept der Relativität. Die meisten von ihnen wissen, dass, wenn wir um das ganze Universums an seiner "Peripherie" herum reisen könnten, in – sagen wir – ein Dutzend Jahren Raumschiff-Zeit, und wir kehrten auf die Erde zurück, würden Milliarden von Jahren in terrestrischer Zeit vergangen sein. Aber bisher ist es nur einigen wenigen aufgefallen, dass der Abstand Erde-Andromedanebel etwa zwei Millionen Lichtjahre sein mögen – gemessen in Begriffen der terrestrischen Physik, aber fast nichts – gemessen von einem Raumschiff aus – unter den richtigen Raumfahrt-Bedingungen. Dies ist zumindest theoretisch möglich, weil Entfernungen im absoluten Raum nicht existieren. Mehr noch, es ist sinnlos, die Idee der Entfernung mit der des leeren Raumes zu kombinieren, da relativ zum absoluten Raum die kürzeste denkbare und die längste denkbare Distanz numerisch äquivalent sind. Dieses Ergebnis wurde zuvor von Cantors Formel impliziert:

$$c + c + c + \ldots = c$$

Wie wäre es nun mit Raumfahrt? Ich fürchte, ich muss meine Antwort auf dieses faszinierende Problem bis zum letzten Artikel verschieben, denn es fehlt noch ein wichtiges Bindeglied zwischen den verschiedenen Teilen unseres Rätsels der Bewegung.

Wir haben festgestellt, dass weder Zeit noch Raum absolute Daten der Realität sind. Wir beginnen zu erkennen, dass die Technik der interstellaren und sogar intergalaktischen Raumflüge wahrscheinlich nicht durch die Berücksichtigung von Millionen von Jahren und Milliarden von parallaktischen Sekunden (Parsec) behindert werden muss. Aber die physische Realität unseres Universums ist offensichtlich ein Produkt aus *drei* grundlegenden Komponenten: Raum, Zeit und – Materie. Bisher haben wir nur von der Relativität der räumlichen und zeitlichen Eigenschaften unseres Universums gehört, aber nichts über seine materielle Komponente. Gibt es auch eine Relativität der Materie, oder ist die materielle Existenz der absolute und irreduzible Kern von Realität?

Mein dritter und letzter Artikel versucht zu zeigen, dass Materie genauso relativ wie Raum und Zeit ist. Und es ist eben diese gegenseitige Relativität von Raum, Zeit und Materie, die es uns ermöglichen wird, zu verstehen, dass interstellare und intergalaktische Reisen nicht das Produkt der fiebrigen Phantasie einiger Science-Fiction-Schriftsteller ist, sondern eine theoretisch gut begründete Implikation der modernen physikalischen Wissenschaft.

* * *

Endnoten (Teil 2):

[1]:
Im Originaltext: "… volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in geometriam inducere". Übrigens "Fluxionsrechnung" ist Newtons ursprünglicher Name für die Differenzialrechnung.

[2]:
vgl. C.F. von Weizsäcker, Zum Weltbild der Physik, 4. Aufl.. Zürich 1949, S.145.

[3]:
Ein Hinweis für Mathematiker: Ja, ich weiß, dass Cantors "positive Theorie des Unendlichen" nur dann eine Lösung für Zenons Problem bietet, wenn wir mathematische "Existenz" nicht mit Konstruktion identifizieren. Allerdings, wenn wir dies tun – worauf die revolutionäre Schule der mathematischen Intuitionisten (Kronecker, Brouwer) besteht, das wir es tun sollten – dann ist Zenons Problem vom mathematischen Standpunkt aus noch ungelöst. Aber Kroneckers "Revolution" würde alle Zahlen außer die positiven ganzen Zahlen aus der Mathematik verbannen. Dies scheint mir das größere Übel!

[4]:
vgl.: Journal f. Math. vol. 84, pp.242-252, 1878.

[5]:
vgl.: Astounding, Juli 1954, S. 76-88

Deutsche Übersetzung (*Rajko Aust*):
"Ich glaube, dass bis heute keine zufrieden stellende Korrelation von Cantors Ideen mit dem realen Universum veröffentlicht wurde.
Einige der Auswirkungen von Cantors Arbeit sind höchst verstörend für einen Geist, der sich ausschließlich an dem quantisierten Denken orientiert, welches der zweiwertigen Logik implizit ist, in einem digital geordneten System des Denkens und in der quantisierter Physik …
Eine Sache, die in Cantors Arbeit implizit ist, ist, dass wenn jede Linie Aleph-n-Punkte enthält und wir die These "Dinge, die demselben Ding gleichen, sind auch einander gleich" akzeptieren, wir dann auch akzeptieren müssen, dass eine Strecke beliebiger Länge gleich jeder anderen Strecke beliebiger Länge ist! Das Konzept "größer als", angewendet auf Strecken, muss dann neu überprüft werden.
Wenn, wie Cantors Konzepte implizieren, "Länge" eine Fiktion ist, die sich von einer begrenzten operativen Methode ableitet, ist der "Abstand" zwischen zwei Punkten eine reine Sache der Messung!
Es scheint mir, dass es viele Anzeichen dafür gibt, dass das gesamte Konzept der Geometrie ein besonderer Fall von etwas viel Allgemeinerem ist, in dem Cantors Konzept des Aleph-null einfach nur eine Einheit erster Ordnung ist.
Und in diesem System, in dem man erkennt, dass die Entfernung eine reine Frage des operativen Verfahren ist …, warum die Sterne so nah sind, wie wir sie wollen."

[6]:
vgl.: P.W. Bridgman, The Logic of Modern Physics. New York 1927.

[*] Die Übersetzung des Textes aus *Alices Abenteuer im Wunderland* von Lewis Carroll stammt von *Jörg Karau* – siehe: http://joergkarau-texte.de/PDF/Alices%20Abenteuer%20im%20Wunderland.pdf

Achilles und die Schildkröte

von *Gotthard Günther*

Von einer Philosophie wird eine Wissenschaft abgeleitet, von einer Wissenschaft kann ein Ingenieurswesen abgeleitet werden. Vom Ingenieurswesen kommen die Konstruktionszeichnungen, und die Bauanleitungen. Und die Philosophie der heutigen Wissenschaft, in Einsteins Relativitätstheorie zusammengefasst, führt nicht zum interstellaren Raumfahrtschiff. Aber eine andere Philosophie...?

– Teil 3 von 3 –

In der Pionierzeit der drahtlosen Telegraphie wurde die Frau von einem der Wissenschaftler, die an der Entwicklung neuer Erfindungen beteiligt waren, von ihren Freunden gefragt, ob sie ihnen erklären könnte, was ihr Mann tut. "Natürlich", sagte sie, "mein Mann hat es mir gerade gestern erst erklärt. Stellen sie sich einen sehr langen Hund vor. Seine Vorderbeine sind in Washington, während seine Hinterbeine noch in New York sind. Wenn sie diesen Hund in New York kneifen, wird er in Washington bellen. Drahtlose Telegraphie ist genau das gleiche – nur ohne Hund."

Etwas ähnliches könnte über die interstellare Raumfahrt gesagt werden. Es wird richtige Raumfahrt sein – nur ohne Raum. Dies scheint eine ziemlich idiotische Aussage zu sein. Dennoch werden wir später sehen, dass sie in einer etwas kryptischen Art das eigentliche Geheimnis einer möglichen Raumfahrt-Technik ausdrückt.

Wir haben in Teil 2 von "Achilles und die Schildkröte" gelernt, dass weder Raum noch Zeit absolute Daten unserer wissenschaftlichen Erfahrung sind, und dass sie nur in einem interdependenten Zusammenhang mit der Materie existieren. Aber bis jetzt haben wir über Materie noch nicht diskutiert. Nun, was ist Materie? Die antike griechische Philosophie hatte eine Antwort. Einer ihrer herausragenden Vertreter (Demokrit) sagte, dass Materie die Anhäufung von winzigen unteilbaren Teilchen von ewiger und unzerstörbarer Substanz ist. Alle Objekte und Phänomene der Natur können durch quantitative Veränderungen in den Anhäufungen und Konfigurationen dieser Teilchen erklärt werden. Dies ist eine frühe Theorie der Atome. Sie hat die wissenschaftliche Entwicklung für mehr als 2000 Jahre geprägt. Kürzlich allerdings wurde diese Theorie modifiziert und in einem solchen Ausmaß modifiziert, dass die ursprüngliche Idee kaum mehr wieder erkennbar ist. Es gibt Elementarteilchen, ja, aber – da ist genauso gut noch etwas anderes. Und wenn Ihnen jemand sagt, dass diese Teilchen überhaupt keine Teilchen sind, werden sie nicht in der Lage sein, zu widersprechen.

Auf den ersten Blick sieht die Situation ziemlich verwirrend aus, aber dies nur aufgrund der Tatsache, dass wir momentan in einer Übergangsphase stecken, von Demokrits Idee der absoluten Atome und der absoluten Materie hin zu der sehr neuen Entdeckung, dass Materie genauso relativ ist wie Raum, Zeit, Farbe, Bewegung usw. Aber genau deshalb ist die Theorie der Elementarteilchen immer noch ein guter Ausgangspunkt, um etwas über das moderne Konzept der Materie herauszufinden. Die folgende Tabelle listet die Teilchen auf, die der Physik bis zum Jahr 1953 bekannt waren, und zeigt uns auch einige ihrer Eigenschaften:

Name	Ladung	Masse	Lebensdauer	Zerfallsschema	Spin
Graviton	0	0	stabil	Nein	2
Photon	0	0	stabil	Nein	1
Neutrino	0	0	stabil	Nein	½
Elektron	-	1	stabil	Nein	½
Positron	+	1	stabil	Nein	½
Meson-Gruppe	0, -, +	210-1400	nicht stabil	Ja	größtenteils unbekannt
Proton	+	1836	stabil	Nein	½
Neutron	0	1838,5	750 sec	Ja	½
Neut.V-Part.	0	2190	nicht stabil	Ja	?
Pos. V-Part.	+	2200	nicht stabil	Ja	?

Wir sind ziemlich sicher, dass diese Tabelle nicht vollständig ist. Entsprechend der gegenwärtigen Theorie sollte es ein "Anti-Proton" geben. Es ist auch unwahrscheinlich, dass die Mesonen-Gruppe mit seinen elf Mitgliedern vollständig ist. Wenn das gegenwärtige System der Zählung der Partikel beibehalten wird, könnte eine endgültige Tabelle 27 oder 29 Teilchen auflisten. Aber das ist nur eine Hypothese.

Allerdings verfügen diese Partikel nicht über die Eigenschaften, die Demokrit ihnen zugeschrieben hatte. Der beste Weg sie zu definieren, ist zu sagen, dass jedes Teilchen eine "lokalisierte" Manifestation eines Quantenfelds repräsentiert. Andererseits füllt jedes Quantenfeld die gesamte Zeit und den gesamten Raum unseres gegebenen Universums aus. Aber es gibt einen Unterschied zwischen diesen Feldern. Nur die Schwerkraft und das elektromagnetische Feld sind echte Felder langer Reichweite. All die anderen Felder sind in ihren beobachtbaren Effekten von extrem kurzer Reichweite. Es könnte mit einem gewissen Körnchen Wahrheit gesagt werden, dass die ersten beiden Felder – teilweise zumindest – das Fernwirkungsverhalten der kurzreichweitigen Quantenfelder repräsentieren. Die Schwerkraft und das elektromagnetische Feld werden daher klassische Felder genannt.

Dies vernichtet das Konzept des leeren Raumes vollständig. Es sieht so aus, als ob der Raum physikalisch nur als Ausdehnung der Quantenfelder jenseits der Existenz "solider" Materie real ist. Dies impliziert auch, dass Entfernung eine quantisierte Eigenschaft ist, die durch allmähliche Anhäufung von Raum-Quanten erzeugt wird.

Und was für den Raum gilt, sollte seine Analogie in der Zeit haben. Es gibt bisher noch keinen experimentellen Beweis dafür, aber es lässt sich völlig sicher voraussagen, dass es auch eine kleinste physikalische Längeneinheit der Zeit gibt, ein irreduzibles Zeit-Quantum. Das Konzept des Quantums – entdeckt zunächst als eine Eigenschaft der Materie in ihrer "verflüssigten" Form als Energie (Planck) – ist zweifellos ein generelles Kriterium, ob etwas messbar ist oder nicht. Raum, Zeit und Materie – soweit sie messbare Eigenschaften besitzen – werden quantisiert. Jedoch, insofern sie nicht eine Ansammlung von Quanten darstellen, sind sie nicht messbar. Und was nicht messbar ist, existiert nicht – wissenschaftlich gesprochen. Oder etwa doch? Nun, die Äquivalenz zwischen physikalischer Existenz und Messbarkeit ist sicherlich für die klassische Physik richtig, aber wir erhalten eine ganz andere und sehr unerwartete Antwort, wenn wir die verfügbaren Informationen im Hinblick auf die Quantenphysik formulieren.

Doch bevor ich die quantenphysikalische Antwort zu formulieren versuche – was uns, nebenbei bemerkt, geradewegs zur Lösung des Problems der Weltraumfahrt führen wird – erlauben sie mir, die wichtigsten Merkmale unseres Problems zu rekapitulieren:

1. Wir lernten aus Cantors Theorie der Alephs, dass das Konzept der kürzeren oder längeren Strecken – oder Intervalle – im Kontinuum rechnerisch bedeutungslos ist.
2. Wir wissen außerdem aus der Lösung von Zenons Paradox, dass das Phänomen der Bewegung unabhängig von der Anzahl der – abzählbaren – physikalischen Raumquanten ist, die ein sich bewegender Körper durchquert. Achilles passiert in der gleichen Zeit genau so viele reelle Punkte wie die Schildkröte, aber mehr Raumquanten als sie.
3. Das Michelson-Morley-Experiment impliziert, dass absoluter Raum und absolute Zeit abstrakte Relationen, aber keine physikalischen Realitäten sind.
4. Die Quantenfeldtheorie informiert uns, dass das grundlegende Substrat aller physischen Existenz eine begrenzte Anzahl von Quanten-Feldern ist, jedes mit der Eigenschaft, sich über den gesamten Raum und durch die gesamte Zeit zu erstrecken.[1]

Mit Hilfe der Argumente (1) und (2) kann die theoretische Machbarkeit interstellarer und sogar intergalaktischer Raumfahrt nachgewiesen werden. Ich werde dies zeigen, indem ich zunächst die Signifikanz dieser Argumente analysiere. Achilles ist in der Lage, in der gleichen Zeit, eine längere Strecke als das Reptil zurückzulegen, weil er dabei nicht mehr und nicht weniger reelle – überabzählbare – Punkte als seine Konkurrentin passiert. Zenon hat aus Gründen der Einfachheit angenommen, dass unser Held genau zweimal so weit reist wie das Reptil. Aber ausgehend von dem, was wir über die absolute Gleichwertigkeit von kürzeren und längeren Entfernungen im Hinblick auf die transfinite Zahl c – siehe Argument (1) – wissen, wäre Zenons Gesichtspunkt auch dann gültig, wenn sein schneller Läufer eine Quintillion mal so weit rennen würde wie der langsame. Das Verhältnis der Distanzen ist irrelevant. Wir fragen daher: Was bringt Achilles dazu, die Schildkröte zu überholen? Die Antwort ist trivial: Er benutzt längere Beine und auf diese Weise gleicht er die Tatsache aus, dass er mehr Raumquanten als sein Gegner durchqueren muss.

Ich fürchte, wir würden schrecklich lange Beine von hier bis zum Andromeda-Nebel brauchen. Achilles ureigene Methode ist nicht sehr praktisch für interstellare Entfernungen. Aber sein Beispiel zeigt ein generelles Prinzip. Distanz *per se* bedeutet überhaupt nichts! Das Zurücklegen einer Entfernung ist eine "reine Sache der operativen Methode" (Campbell). Wir haben die Sterne noch nicht erreicht, weil wir eine sehr begrenzte operationale Methode der Fortbewegung benutzen – eine generelle Prozedur, die übrigens alles beinhaltet, vom Krabbeln eines Kleinkindes bis zum Flug eines Düsenjets oder einer Rakete.

Unsere Frage ist: Gibt es einen grundsätzlich anderen Typ operativer Methode? Ein Verfahren, besser dazu geeignet, kosmische Distanzen zurückzulegen? Die Antwort ist Ja, und sie ergibt sich durch die Argumente (3) und (4).

Wenn sie verschiedene Formen von Bewegung haben, manche langsamer und manche schneller, aber alle unbefriedigend für einen bestimmten Zweck, könnten sie fragen: Was ist ihr gemeinsames Charakteristikum, welches sie alle so unzureichend macht? Die Antwort ist in unserem Fall einfach. Das Kleinkind, die Schildkröte, Achilles oder der Düsenflieger, sie alle versuchen, Distanzen zurückzulegen, indem sie Raumquanten durchqueren. Aber in Bezug auf Raum-Quanten gibt es immer kürzere und längere Strecken, und egal wie gut Ihre operative Methode ist, es kommt immer der Punkt, an dem die Anzahl der Raum-Quanten zu groß wird für ihr Verfahren. Von der Größenordnung galaktischer Distanzen her gesehen gibt es kaum einen Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des krabbelnden Kleinkinds und der des Jets. Beide sind gleichermaßen deklassiert im Rennen um die Sterne.

Der Punkt ist also: Können wir uns eine operative Methode der Fortbewegung vorstellen, die nicht versucht, Entfernungen im Sinne von Raum-Quanten zurückzulegen? Denn solange wir das tun, müssen wir zwischen kürzeren und längeren Distanzen unterscheiden. Die Argumente (3) und (4) legen nahe, dass es eine solche neuartige Methode geben sollte. Lassen sie uns deshalb herausfinden, was diese Argumente wirklich über die Möglichkeit der interstellaren Reisen bedeuten. Nach (3) existiert der absolut leere Raum im strengen physikalischen Sinne nicht. Folglich gibt es auch keine absoluten Entfernungen. Was existiert, ist "Räumlichkeit" (Einstein) als messbare Eigenschaft der Materie-im-Allgemeinen, dass heißt von allen physikalischen Zuständen der Natur. So ist der "absolute" Abstand zwischen uns und, sagen wir, dem Andromeda-Nebel, der es uns bisher unmöglich gemacht hat, diese ferne Galaxie zu besuchen, nicht absolut real. Er ist nur relativ real in Bezug auf unsere Kleinkind-Fortbewegung, und er würde sofort verschwinden, wenn wir die richtige operative Methode entdecken könnten, um solche Distanzen zu überwinden.

An diesem Punkt stelle ich mir vor als höre ich einige meiner Leser murmeln: "Das klingt verdächtig! Auch abgesehen vom Problem des Raumflugs wissen wir, es besteht eine gewaltige Entfernung zwischen uns und einer fernen Galaxie." Sicherlich, die gibt es! Aber der Punkt ist: Müssen wir sie in Form von räumlicher Entfernung interpretieren? Eine Reise zum Andromeda-Nebel, ausgeführt in Lichtgeschwindigkeit, würde rund zwei Millionen Jahre dauern – irdischer Zeit. Es gibt nichts, was uns davon abhalten könnte, zu sagen: Es existiert eine zeitliche Entfernung zwischen uns und dieser Galaxie. Unser Raumschiff ruht bewegungslos im Raum, aber eine Entfernung von zwei Millionen Jahren wirkt sich unmittelbar auf die räumliche Entfernung der Andromeda-Galaxie aus. Bewegung relativ zum leeren Raum ist nicht beobachtbar! Bewegung relativ zur ereignislosen Zeit ist ebenso wenig beobachtbar. Es folgt mit unerbittlicher Logik, dass die beiden Aussagen: Ich reise von hier bis zur nächsten Galaxie durch den Raum oder – ausschließlich – durch die Zeit absolut gleichwertig sind. Denn wenn ich durch den Raum mit Lichtgeschwindigkeit reise, verlangsamen sich meine Uhren bis zum absoluten Stillstand.

Offensichtlich sind Raum und Zeit austauschbare Gebilde. Aber austauschbar sind sie nur auf der Grundlage von Materie. Als ich sagte, wir reisen von hier bis zur nächsten Galaxie zwei Millionen Jahre durch die Zeit, aber nicht durch den Raum, maß ich die Zeit außerhalb des Raumschiffs. Als ich sagte, dass wir den gleichen Weg exklusiv durch den Raum und nicht durch die Zeit reisen, wurde letztere von den Uhren des Schiffes gemessen. Der Unterschied *zwischen den beiden Gruppen von Uhren ist ein materieller Zustand!* Aber das bedeutet, es gibt *drei* miteinander verbundene Interpretationen, durch welche die wechselseitigen Beziehungen zwischen Erde und Andromeda-Nebel definiert werden können. Wir können sagen:

- Es gibt ein Zeitintervall (T) zwischen den beiden.
- Es gibt einen räumlichen Abstand (S) zwischen den beiden.
- Es gibt einen materiellen Gradienten (M) zwischen den beiden.

Wir entdeckten, dass T und S austauschbar waren, sofern der materielle Gradient M durch eine Konstante repräsentiert war. Diese Konstante ist die Lichtgeschwindigkeit. Es wurde angenommen, dass unser Schiff mit dieser Geschwindigkeit unterwegs war.

Eigentlich sind wir mit der Austauschbarkeit der drei kosmischen Bestandteile des Universums in unserem täglichen Leben ziemlich vertraut! Aber wir denken nie darüber nach, und wir versagen daher dabei, den generellen Stellenwert der vertrautesten Phänomene zu bemerken.

Im vorhergehenden Artikel verglich ich das Michelson-Morley-Äther-Drift-Experiment mit der Situation zweier Autos, die auf der Autobahn unterwegs sind, und ich stellte fest, dass der Unterschied in den Ergebnissen in Bezug auf die Relativgeschwindigkeit von bewegten Objekten aufgrund der Tatsache zustande kommt, dass im Falle der beiden Fahrzeuge eine "absolute" Konstante existiert: die Autobahn. Nun weiß jeder, der schon einmal ein Auto gelenkt hat, dass seine Fortbewegung den folgenden Gesetzen folgt:

$$\frac{S}{M}=T \;; \qquad \frac{S}{T}=M \;; \qquad T \cdot M=S$$

(Wobei T = Zeitintervall, S = räumlicher Abstand, M = Geschwindigkeit = materieller Gradient).

Im Falle unserer Autobahnfahrt ist *S* immer eine Konstante, sagen wir, der Abstand zwischen New York und Chicago. S ist grundlegend und kann nicht verändert werden. Aber T und M sind variabel, und zu einem gewissen Grad austauschbar. Wir wissen aus unserer Erfahrung, dass wir den Wert von T reduzieren können, indem wir den Wert von M erhöhen. Im Klartext: Wenn wir mehr M – Benzin, Gummi, Öl, etc. – verbrauchen, können wir Zeit (T) einsparen. Aber, wenn wir wirtschaftlich mit unserem Motor, Reifen und Kraftstoff umgehen wollen, müssen wir dies in Form einer längeren Dauer bezahlen. Es gibt natürlich sowohl praktische als auch theoretische Grenzen für dieses Experiment. Vergessen sie nicht, dass nicht alle Verkehrspolizisten *Astounding* lesen, und bereit sind, unser Argument als neuartige Ausrede für zu schnelles Fahren zu akzeptieren, dass wir nur Raumfahrttheorien testen.

Es gibt in der Tat eine sehr grundlegende Einschränkung des operativen Verfahrens, dass den Austausch zwischen T und M regelt. Diese klassische Methode kann niemals gut genug sein, eine der beiden Komponenten völlig verschwinden zu lassen, weil in diesem Fall der Wert der anderen unendlich wird. Aber eben dieselbe, gar primitive Art der irdischen Fortbewegung erlaubt es uns, die grundlegenden Wechselbeziehungen zwischen T und M zu untersuchen, wobei S eine "absolute" Konstante ist.

Im Falle des Michelson-Morley-Experiments wird die Austauschbeziehung zwischen den kosmischen Komponenten auf einer anderen Grundlage berechnet. Diesmal ist die absolute Konstante M, der materielle Faktor, und M wird von der allgemeinsten Eigenschaft der Materie, der Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen repräsentiert. Daher sind wir in diesem Fall berechtigt, eine Austauschbeziehung zwischen T und S zu erwarten. Dies wird in der Tat durch die Transformationsgleichungen von H. A. Lorentz bestätigt:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{und} \qquad x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wenn wir zwei Systeme K und K' haben, die sich in geradlinig gleichförmiger Bewegung zueinander befinden, dann besteht die folgende Beziehung zwischen den Zeitabständen T und den räumlichen Distanzen S entsprechend Einsteins Interpretation der Formeln[2]: Je schneller K sich relativ zu K' bewegt, desto länger wird ein Zeitintervall werden, wenn es von einem System auf das andere transformiert wird, und desto kürzer wird bei der selben Übertragung der räumliche Abstand. Im gleichen Maße, wie die Zeit zunimmt, beginnt der Raum zu verschwinden – und umgekehrt. Die Grundlage dieser Raum-Zeit-Wechselbeziehung ist Masse oder Materie, weil bei Lichtgeschwindigkeit die Erhöhung der Masse für jeden sich bewegenden Körper unendlich wird.

Bisher haben wir zwei sehr wichtige Ergebnisse erzielt! Wenn wir den räumlichen Abstand (S) als Grundlage verwenden, erhalten wir eine Wechselbeziehung

$$T \leftrightarrow M \tag{1}$$

Wenn wir die Materie M als konstant betrachtet finden wir, dass

$$S \leftrightarrow T \tag{2}$$

gilt. Nachdem an diesem Punkt angekommen sind, können wir der Frage nicht mehr ausweichen: Gibt es ein drittes Austauschverhältnis, in dem T die grundlegende Konstante ist? Meine Antwort ist ein sehr positives Ja. Es muss eine dritte Wechselbeziehung geben

$$M \leftrightarrow S \tag{3}$$

Weil die gegenseitige Abhängigkeit von S, M und T derart ist, dass die ersten beiden Wechselbeziehungen niemals existieren könnten, wenn diese nicht durch eine dritte zwischen M und S ausgeglichen würden. (Wir werden dies später mit Mitteln der symbolischen Logik zeigen.)

Die Wechselbeziehung (3) ist die interessanteste für uns. Wir kennen (1) nur in dem begrenzten Rahmen unserer täglichen Erfahrung mit terrestrischem Reisen. (2) ist im Moment ein rein metrisches Problem zwischen den beiden Kontinua Raum und Zeit. Aber (3) stellt den eigentlichen Kern der modernen quantenmechanischen Physik dar. Es wird heutzutage immer schwieriger, eine klare Trennlinie zu ziehen, zwischen dem, was an irgend einem physikalischen Datum "räumlich" ist und was "materiell". Die Grenze zwischen Raum und Materie zeigt eine klare Trennung nur in der klassischen Physik. Sie neigt dazu, unter den "eingrenzenden" Bedingungen sowohl in der Mikrophysik als auch in der Astrophysik zu verschwinden. Es gilt nur für das mittlere Feld der irdischen Makrophysik, dass wir mit einiger Sicherheit zu wissen *scheinen*, was den Unterschied zwischen leerem Raum und fester Materie ausmacht. In populärer Sprache: Es ist der Unterschied zwischen Etwas und Nichts. Materie ist die Summe "aller Dinge", und der leere Raum ist die völlige Abwesenheit von Dingen. Jedes Kind kann das verstehen. Aber vor nicht allzu langer Zeit wurde eine höchst wichtige Formel entdeckt

(Einstein):

$$E = m \cdot c^2$$

(Wobei E = die Energie eines Körpers im Ruhezustand, m = seine Masse und c = Lichtgeschwindigkeit).

Danach wurde zum Allgemeinwissen, dass "Feste Materie" (Masse) in Energie (Atombombe) umgewandelt werden kann, und dass es zumindest theoretisch möglich ist, Strahlungsenergie (Licht) in Materie zurück zu verwandeln. Gilt unsere Unterscheidung zwischen Etwas und Nichts jetzt noch? Ist Energie ein Ding? Uns wird gesagt, dass Materie ein elektromagnetisches Phänomen ist. Aber das elektromagnetische Feld füllt den gesamten Raum aus. Der Raum selbst scheint ein Feld-Phänomen zu sein. Das bedeutet, mikrophysikalisch gesprochen, es wird mehr und mehr unmöglich, eine scharfe Trennlinie zwischen einem Ding und dem Raum, der es umgibt, zu ziehen.

Eine analoge intime Beziehung zwischen Raum und Materie existiert in der makrokosmischen Physik. Eine Vorbemerkung: Angenommen sie haben eine Kiste, die teilweise mit Murmeln gefüllt ist. Sie nehmen diese Murmeln, eine nach der anderen, aus dem Behälter, bis keine mehr *darin* ist. Niemand wird bezweifeln, dass eine Sache übrig bleibt. Es ist die leere Kiste. Ihre Fähigkeit, ein Behältnis zu sein, wurde durch das Entfernen ihres Inhalts nicht betroffen. Diese Idee einer Beziehung zwischen dem Raum und dessen Inhalt ist die der klassischen Makrophysik. Aber lassen sie uns jetzt zur makrokosmischen Physik übergehen.

Stellen sie sich vor, sie wären ein Wesen mit göttlicher Macht, und befinden sich außerhalb des Universums. Sie greifen in das Universum hinein und entfernen daraus eine Galaxie und einen Nebel nach dem anderen, und fahren damit fort, bis nichts Materielles, nicht einmal der kleinste Meteorit, nicht der dürftigste Hauch kosmischen Staubes im Universum übrig geblieben ist. Entsprechend dem gesundem Menschenverstand sollten dann zwei Objekte übrig bleiben: Der leere Raum, der darauf wartet, wieder mit Dingen gefüllt zu werden, und die leere Zeit, die auf das Ereignis einer neuen Schöpfung wartet. Der gesunde Menschenverstand sagt uns außerdem, dass die Dimension unseres Universums nicht durch das Entfernen von Materie und Ereignissen beeinflusst werden sollte. Aber der gesunde Menschenverstand hat uns einmal getäuscht, als wir uns mit Cantors Theorie der transfiniten Zahlen beschäftigt haben, und er täuscht uns erneut in der makrokosmischen Physik.

Wir werden nun einen flüchtigen Blick darauf werfen, was mit der Zeit in einem Universum passiert, welches aller Materie beraubt wurde. In unserem bestehenden Universum hat die Zeit zwei Richtungen. Sie erstreckt sich sowohl in Richtung Vergangenheit als auch in Richtung Zukunft. Aber in einem leeren Universum hätte die Zeit nur eine Richtung – in die Zukunft. Eine Vergangenheit würde nicht existieren. Die Möglichkeit des "Vergehens" von Zeit verlangt das Vorhandensein von Materie.

Aber wie ist das mit dem Raum? Vor einiger Zeit versuchte der englische Physiker Sir Arthur Eddington, die gegenseitige Abhängigkeit von Raum und Materie in bestimmten Gleichungen zu definieren – in einer etwas ähnlichen Art, wie die Maxwell-Hertz Feldtheorie die elektromagnetischen Felder mit Ladungen oder Polen verbindet. Eddingtons Gleichungen gestatten zwei Interpretationen, welche als das Einstein- und das de Sitter-Universum bekannt wurden. Einsteins Universum ist "statisch", das de Sitter'sche ist in ständiger Expansion – und enthält keine Materie! Überlegen sie, was das bedeutet! Ein Raum, der "keine Materie enthält", aber sich in ständiger Ausdehnung befindet, ist Materie in Form von Strahlungsenergie. Es wurde später entdeckt (Friedmann, Lemaître, Robertson), dass die Eddington-Gleichungen eine Reihe von Lösungen erlauben, die eine Verbindung zwischen den Extremen des Einstein- und des de Sitter-Universums beschreiben können.

Der Kern der Theorie kann wie folgt beschrieben werden: Wenn sie etwas Materie in das de Sitter-Universum bringen, beginnt ihre Gravitationsenergie der Ausdehnung entgegen zu wirken. Die Expansion der Welt beginnt sich zu verlangsamen. Wenn sie mehr und mehr Materie hinzuzufügen, werden sie schließlich an einem Punkt ankommen, wo sich die Ausdehnungs- und Gravitationskräfte gegenseitig ausgleichen. Dies ist die statische Welt von Einstein. Aber wenn sie noch mehr Materie hinzufügen, dann wird die Gravitation stärker als die Expansion und das Universum beginnt zu schrumpfen.

Es scheint als ob Materie eine "kontrahierende" Wirkung auf den Raum hat und einen entsprechenden Einfluss auf die Struktur der Zeit. Soweit es den Raum betrifft, ist eine Möglichkeit, seine Beziehung zur Materie zu beschreiben, durch die folgende Formel gegeben:

$$\frac{K \cdot M}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R \tag{5}$$

(K = Gravitationskonstante, M = Masse des Universums; c = Lichtgeschwindigkeit; π = Verhältnis von Umfang zu Durchmesser;. R = Krümmungsradius)

Da (5) derzeit eine höchst spekulative Formel ist, werde ich mich nicht im Detail mit ihr befassen. Aber selbst wenn sie nur eine grobe Annäherung an die Wahrheit darstellt, bedeutet sie ganz klar, dass Distanz ein Feld-Effekt ist. Durch Erhöhen oder Verringern dieses Effekts können räumliche Distanzen verkürzt oder verlängert werden. Dies scheint irgendwie verstäändlich. Aber die Entfernungen in unserem Universum sind so enorm, dass uns selbst eine deutliche Reduzierung der räumlichen Dimensionen nicht viel helfen würde. Was wäre der Nutzen davon, eine Galaxie, die etwa eine Milliarde Lichtjahre entfernt ist, in unsere unmittelbare "Nachbarschaft" von 50 Millionen Parsec (parallaktische Sekunden) zu ziehen. Darüber hinaus würden wir dafür die Energie von Millionen oder Milliarden von Galaxien benötigen. Die ganze Idee ist der Gipfel der Absurdität.

Glücklicherweise legen unsere grundlegenden Wechsel-Beziehungen (1), (2) und (3) etwas anderes nahe. Etwas weiter vorn in diesen Artikeln habe ich festgestellt, dass Raum und Zeit Kontinua sind, Materie aber eine diskontinuierliche Struktur hat, sie ist quantisiert. Dann passierte eine sehr verwirrende Sache: Wir fanden heraus, dass der Raum auch quantisiert wurde, wenn wir durch ihn reisten. Zenons Paradoxon wurde durch den Konflikt zwischen abzählbaren (quantisierten) und nicht abzählbaren Zahlen erzeugt. Wie konnte das passieren? Die Antwort ist einfach: Alle klassischen Formen der Bewegung erfordern eine teilweise "Materialisierung" des Raumes. Wir reisen durch den Raum, zum Beispiel über eine Autobahn. Und eine Autobahn, die Distanz repräsentiert, als der funktionelle Teil eines Akts der Fortbewegung, ist materialisierter Raum. Und Distanz in Form einer Autobahn ist natürlich quantisiert. Für das Flugzeug spielt unsere Atmosphäre die entsprechende Rolle. Und sogar das Prinzip des Raketenantriebs – welches für den kurzen Hüpfer zum Mond ausreichen könnte – basiert immer noch auf der Idee der quantisierten Bewegung. Es ist nur ein wenig anspruchsvoller – sie nehmen Ihre "Autobahn" mit. Diesmal ist es Ihr Raketentreibstoff.

Aber diese Konvertierbarkeit des räumlichen Kontinuums in quantisierte materielle Existenz ist nur möglich, wenn es einen umgekehrten Vorgang gibt, durch den eine quantisierte materielle Distanz in einen nicht-quantisierten Zustand der Kontinuität umgewandelt werden kann. Wir haben im Moment noch nicht die geringste Ahnung, wie dies bewerkstelligt werden könnte. Dennoch wissen wir zwei Dinge mit absoluter Sicherheit. Wir wissen ohne Zweifel, dass diese inverse Konvertierbarkeit von quantisierter zu nicht-quantisierter Existenz existiert. Weil unsere drei Wechselbeziehungen,

$$T \leftrightarrow M$$

$$S \leftrightarrow T$$

$$M \leftrightarrow S$$

nicht möglich wären, wenn Raum nur als eine quantisierte Form von Materie auftauchen würde, die Materie aber nie als räumliches Kontinuum. Materie *hat* räumliche Ausdehnung, in quantisierter Form, niemand hat das jemals bezweifelt. Unsere ganze Technologie basiert auf diesem Wissen. Wenn aber die inverse Beziehung zwischen Materie und Raum *nicht* existieren würde, müssten wir annehmen, dass Materie – und mit ihr die Zeit – absolute Daten der Natur darstellen würden. Kein moderner Wissenschaftler ist bereit, dieses Zugeständnis zu machen.

Die andere Sache, die wir ebenso sicher wissen, ist, dass mit einer Technologie, die nicht mehr auf der Diskretheit der Materie, sondern auf der Kontinuität von Raum und Zeit basiert, die Distanz über Bord geht. Es ist keine Rede mehr von kürzeren oder längeren Strecken. Sie verschwinden vollständig. Ein Liniensegment von der Länge eines Milliardstel Millimeters ist numerisch äquivalent zu einem Liniensegment von trans-kosmischer Länge.

Es bleibt nur eine "kleine" Frage übrig: Wie können wir eine Technik der Fortbewegung entwickeln, die nicht mehr den Raum in seinem quantisierten materiellen Aspekt nutzt, sondern die Materie in ihrer nicht quantisierten, räumlichen Version? Glücklicherweise sind wir nicht völlig unwissend in dieser Hinsicht. Wir haben zumindest ein Wissen über die Defizite – wir sind uns der Daten bewusst, die fehlen. Wir müssen zum einen das Gesetz entdecken, das die physikalische Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen und dem Gravitationsfeld beschreibt und wir brauchen zum anderen detaillierte Informationen über den kosmischen "Klebstoff", der den Atomkern zusammenhält (Mesonen-Theorie).

Ein Wissenschaftler (H. Bethe) hat kürzlich die Meinung geäußert, dass wir leistungsfähigere mathematische Werkzeuge benötigen, um das Problem des Kerns anzugehen. Es könnte gut sein, dass Cantors Theorie der überabzählbaren Mengen letztlich die Antwort liefert. Es sollte nicht vergessen werden, dass Cantor nur die *Existenz* der transfiniten Zahlen entdeckt hat. Wie man sie in den Naturwissenschaften benutzt, ist immer noch ein Rätsel für uns. Im vorhergehenden Artikel konnte ich nur zeigen, dass überabzählbare Mengen auf das Problem der Bewegung im Raum angewendet werden können und dass ihre Anwendung zeigt, dass Entfernung eine Eigenschaft der quantisierten Materie ist, aber nicht eine Eigenschaft des Kontinuums wie Raum oder Zeit.

Und so müssten diese Artikel über das Problem des interstellaren und intergalaktischen Raumflugs mit einer sehr unbefriedigenden negativen Note schließen, gäbe es nicht eine neue Entdeckung auf dem Gebiet der angewandten symbolischen Logik. Wir sind jetzt auch mit der Tatsache vertraut, dass die symbolische Logik zur Analyse elektronischer Schaltungen und deren Strom-Spannungsmuster (power patterns) verwendet werden kann. Ich werde diese Technik benutzen, um die grundlegenden Strukturen dieser Strom-Spannungsmuster aufzuweisen, die für alle interstellaren Raumschiffe angewendet werden müssen. Ich weiß natürlich nichts über die Details, die gänzlich von bisher noch unbekannten operativen Verfahren elektromagnetischer, gravitonischer und/oder mesonischer Eigenschaften abhängen. Aber ich weiß durch logische Analyse, dass sie folgendem strukturellen Mustern entsprechen müssen.

"M", "S" und "T" sollen wieder die Symbole sein, die unsere drei kosmischen Komponenten des Universums bezeichnen. Ihre Wechselbeziehungen sollen durch ↔', ↔" und ↔"' jeweils repräsentiert werden. Wir erhalten dann drei elementaren Prinzipien des Austausches:

↔'		↔"		↔"'	
M	S	S	T	T	M
S	M	T	S	M	T

Tabelle I

Wir wissen andererseits, dass jedes physikalische Ereignis alle drei kosmischen Komponenten beinhaltet, weil es physisch ist und es sowohl im Raum als auch in der Zeit geschieht. Das bedeutet, dass keine der drei Wechselbeziehung ↔', ↔", ↔"' jemals im Universum isoliert auftritt. Wir führen deshalb zwei operative Verfahren ein, mit der Absicht, alle drei Wechselbeziehungen zu kombinieren: $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$. Dabei ist die Wahl dieser beiden Verfahren keineswegs willkürlich, denn es sind in der Tat die einzig möglichen Operationen, wenn wir alle drei Wechselbeziehungen kombinieren wollen. Wir definieren $\overrightarrow{op}$ als die Kombination der oberen Zeile aller drei Beziehungen ↔, d.h. in diesem Fall betrachten wir die Wechselbeziehung von M zu S, von S zu T und von T zu M.

Die zweite Operation $\overleftarrow{op}$ kombiniert dementsprechend die untere Zeile der ↔ Beziehungen in der Tabelle I [3], also S zu M, T zu S und M zu T.

Um unsere operationalen Prozeduren $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$ zu bilden, ordnen wir die kosmischen Komponenten M, S und T in allen möglichen Kombinationen in zwei Zeilen X und Y an (vgl. Tabelle II). Wir schauen dann nach den Werten für $\overrightarrow{op}$ in der oberen Zeilen der Tabelle für ↔', ↔" und ↔"' und nehmen immer den *zweiten* Wert. Daher wählen wir, wenn unsere zwei Zeilen die Kombination $M|S$ oder $S|M$ enthalten, den Wert S aus der Tabelle für ↔'. Wenn die Kombination $S|T$ oder $T|S$ auftritt, wählen wir erneut den zweiten Wert der oberen Zeile, diesmal von ↔". Dementsprechend muss unser Wert T sein, und so weiter. Für $\overleftarrow{op}$ wählen wir den *zweiten* Wert der unteren Zeile aus den ↔ Tabellen. Wir erhalten somit die Definitionen der Operationen $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$ in der folgenden Tabelle:

X	M	M	M	S	S	S	T	T	T
Y	M	S	T	M	S	T	M	S	T
X $\overrightarrow{op}$ Y	M	S	M	S	S	T	M	T	T
X $\overleftarrow{op}$ Y	M	M	T	M	S	S	T	S	T

Tabelle II

Diese Anordnung mag für den Uneingeweihten redundant erscheinen. Sie ist es aber nicht. Als Grundlage für die weiteren Berechnungen benötigen wir alle logisch möglichen Kombinationen, auch solche scheinbar redundanten wie diejenigen zwischen M und M, S und S, und T und T.

Eines ist absolut sicher – egal, wie interstellarer und intergalaktischer Raumflug erreicht wird und welches technische Arrangement verwendet werden könnte –, alle Varianten von Raumschiffen, die in der Lage wären, kosmische Entfernungen zu überwinden, werden eine Schalttafel haben, die auf den beiden operativen Mustern von $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$ basiert. Der interessante Punkt ist natürlich, was man damit anfangen könnte – nun, viele Dinge. Es ist unmöglich vorauszusagen, welches der einzelnen technischen Verfahren, die in das Muster von $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$ fallen, schließlich verwendet werden wird. Dies hängt gänzlich davon ab, welche zukünftigen Entdeckungen in der Nuklear- und Astrophysik gemacht werden. Aber wir könnten genauso gut – im Sinne einer praktischen Demonstration unserer "Schalttafel" – davon ausgehen, dass die Beschreibung des interstellaren Fluges, wie sie von einem unserer hervorragenden Science-Fiction-Autoren gegeben wurde, in etwa korrekt ist. Erlauben sie mir, diese Beschreibung aus einem von Isaac Asimovs Romanen zu zitieren, in dem einer der Offiziere eines Raumschiffs die Prinzipien des interstellaren Flugs für die Passagiere beschreibt[4]:

> "Ladies and gentlemen! We are ready for our first Jump ... The Jump is exactly what the name implies. In the fabric of space-time itself, it is impossible to travel faster than the speed of light ... Therefore one leaves the space-time fabric to enter the little-known realm of hyperspace, where time and distance have no meaning. It is like traveling across a narrow isthmus to pass from one ocean to another, rather than remaining at sea and circling a continent to accomplish the same distance.
>
> ... Great amounts of energy are required, of course, to enter this 'space within space' as some call it, and a great deal of ingenious calculation must be made to insure re-entry into ordinary space-time at the proper point. The result of the expenditure of this energy and intelligence is that immense distances can be transversed in zero time. It is only the Jump which makes interstellar travel possible."

Asimov sieht wie viele andere Science-Fiction-Schriftsteller ganz klar, dass die Möglichkeit der Raumfahrt von der Beseitigung der räumlichen Entfernung abhängt. Wir wissen jetzt, dass die Entfernung als eine Anhäufung von Raum-Quanten zu interpretieren ist, und wir überwinden Distanzen, indem wir Raum-Quanten passieren. Ich bemerkte in Teil 2 dieser Serie: Egal, *wie* gut unsere Fortbewegungsmethoden werden könnten, es gibt immer einen kritischen Punkt, an dem die kumulierte Anzahl der

Raum-Quanten für unsere operativen Methoden zu groß wird. Die Frage ist daher: Wird es möglich sein, eine Technik der Fortbewegung zu konzipieren, bei der wir "springen", wie Asimov sagt. Mit anderen Worten: Bei der wir keine Raum-Quanten zurücklegen, wenn wir Distanzen überwinden.

Wir wissen, dass das, was quantisiert ist, den M-Faktor im Universum darstellt. Weder Zeit noch Raum sind als echte Kontinua *per se* quantisiert. Es ist nur ihr Materie-Aspekt, der ihnen eine quantisierte Struktur verleiht. Es läuft alles auf das Problem hinaus, ob wir den M-Faktor in unserem Operationen $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$ loswerden können oder nicht. Unsere Autobahn-Beispiel hat uns bereits gezeigt, dass M und T gegeneinander aufgerechnet werden können – zumindest bis zu einem gewissen Grad. Das gleiche gilt für S und T. Wenn es aber eine allgemeine Konvertierbarkeit aller drei kosmischen Komponenten ineinander gibt, dann sollte es in der Tat möglich sein, eine der Komponenten operativ zu eliminieren. Asimovs Beschreibung lässt vermuten, dass die M-Komponente verschwinden sollte, denn sie ist der materielle Faktor, der die Distanz produziert.

Es gibt ein sehr einfaches Verfahren, mit dem der quantisierte M-Faktor beseitigt werden kann. Für $X \overrightarrow{op} Y$ wird es durch folgende Formel ausgedrückt:

$$(X \overrightarrow{op} Y)\ \overrightarrow{op} \leftrightarrow' (X \overrightarrow{op} Y) \tag{6}$$

Durch die Verwendung von (6) transformieren wir unsere ursprünglichen Sequenz für $X \overrightarrow{op} Y$

$$\text{M S M S S T M T T} \tag{6a}$$

in die M-freie Sequenz[5]

$$\text{S S S S S T S T T} \tag{6b}$$

Diese neue Abfolge, die nur S und T enthält, stellt die symbolische Bedeutung von (6) dar. Wir sind jedoch mehr an ihrer praktischen Bedeutung für interstellare Reisen interessiert. Aus diesem Blickwinkel beschreibt (6) das grundlegende logische Muster einer technischen Operation, die aufgehört hat, quantisierte Daten zu verwenden. Wir erinnern uns, dass quantisierte Daten immer durch M repräsentiert werden. Aber (6) enthält keinen M-Faktor mehr. (Nebenbei bemerkt, (6) bedeutet *nicht*, dass die Materie *per se* eliminiert wurde, sondern nur ihr grundlegendes Merkmal der Quantisierung.) Daraus folgt, dass die mathematische Theorie von (6) nicht auf die abzählbare Arithmetik begründet ist. Stattdessen werden transfinite Cantor'sche Zahlen verwendet. Und wir erinnern uns, dass das Konzept der Entfernung in der transfiniten Arithmetik gänzlich verschwindet. Mit anderen Worten, (6) beschreibt das Prinzip des Schaltplans einer technischen Operation, die die Entfernung beseitigt.

Es kann mit absoluter Sicherheit gesagt werden, dass (6), ihre entsprechenden Formel für die inverse Operation $X \overleftarrow{op} Y$

$$(X \overleftarrow{op} Y)\ \overleftarrow{op} \leftrightarrow''' (X \overleftarrow{op} Y) \tag{7}$$

oder jeder andere Ausdruck vom Typ (6) und (7) die grundlegenden Formeln aller zukünftigen interstellare oder sogar intergalaktischen Raumfahrt sein werden – vorausgesetzt natürlich, dass unsere allgemeine Annahme der universellen Konvertibilität von Raum, Zeit und Materie richtig ist. Wenn sie es nicht ist, könnten wir genauso gut allen unseren Träumen von Weltraumreisen außerhalb unseres Sonnensystems Lebewohl sagen. Die Entfernungen sind zu groß. Die Ideen interstellarer Reisen, bei denen Raumschiffe Jahrhunderte unterwegs sind und wo nur die Ur-Enkel der ursprünglichen Reisenden ankommen, sind völlig absurd. Interstellare und intergalaktische Raumfahrt wird nur zu einer vernünftigen Annahme, wenn wir eine Technik entwickeln, die Entfernungen völlig unter den Tisch fallen lässt. Dies basiert jedoch absolut auf der Annahme der ursprünglichen Austauschbarkeit der drei kosmischen Bestandteile des Universums und der zusätzlichen Annahme, dass eines durch die beiden anderen substituiert werden kann.

Es gibt zwei Komponenten, die Kontinua sind und eine, die quantisiert ist. Die Länge einer Strecke oder die Dauer eines Intervalls bedeutet nichts im Kontinuum. Diese ist nur für die dritte (quantisierte) Komponente signifikant. Wenn wir in der Lage sind, eine Technik zu entwickeln, welche die quantisierte Komponente beseitigt, indem man sie durch nicht quantisierte Eigenschaften ersetzt, ist unser Problem, wie wir die Weiten des Alls durchqueren, gelöst. Unsere Formeln (6) und (7) zeigen, dass eine derartige Technik *logisch* möglich ist. Was (6) und (7) *praktisch* impliziert, kann in sehr einfachen Worten ausgedrückt werden. Alles, was existiert, besteht aus *drei* Komponenten. Die drei *natürlichen* Bestandteile des Universums sind M, S und T. Aber wenn der Mensch nun einen *künstlichen* Zustand der Existenz einführen würde, benötigte er ebenfalls nur *drei* Komponenten. Aber weil er künstlich ist, basiert dieser Zustand der Existenz auf einer Operation "op" – welche ihrerseits *als Basiskomponente wirkt*.

Daher haben wir jetzt – indem wir P für $\overrightarrow{op}$ und $\overleftarrow{op}$ einführen – vier gleichermaßen fundamentale Parameter:

P - M - S - T

Dies führt zu einer Redundanz, soweit es die menschliche Technik betrifft. Wir könnten eine der vier Komponenten weglassen – oder vielmehr ihre Eigenschaften. Wenn wir P weglassen, haben wir das Universum so, wie es ist, ohne das Handeln des Menschen. Aber natürlich ist P noch da, soweit es die objektive Welt betrifft, aber es wird über M - S - T *verteilt*. Der Prozess P erscheint in diesem Fall nur als ein natürliches Ereignis wie das Fallen des Regens, einem Blitzschlag, Hunger oder Durst, usw. Aber wenn wir einen unabhängigen Parameter P als einen vierten Freiheitsgrad für Handlungen einführen, fügen wir menschliche kreative Verfahren zu den natürlichen Ereignissen hinzu, um etwas zu produzieren, was noch nie zuvor existiert hat. In unserem speziellen Fall – Weltraumfahrt. Das Hinzufügen von P erlaubt es, die Eigenschaften jeweils einer der anderen Komponenten durch Substitution zu eliminieren. Unsere Formeln (6) und (7) leisteten dies für das Muster: P - S - T

Dies ist möglich, weil alle menschliche Technik und alles Handeln *zweiwertig* ist. Um irgendetwas zu tun, verlangen wir operationale Entscheidungen und zwei alternative Pole zwischen denen wir zu entscheiden haben. Nichts anderes! Daher ist das Muster P - M - S - T immer redundant – so weit es jedes einzelne technische Verfahren betrifft. M (oder die Eigenschaften von M) können genauso substituiert werden wie S, T oder P.

Jedoch betrifft diese Redundanz nur eine praktische, d.h. begrenzte Handlung oder Prozedur und nicht das allgemeine rationale Muster, auf dem unser Verfahren basiert. Das ist der Grund, warum wir damit nicht zufrieden sein können, dass die Wissenschaft, so wie wir sie heute kennen, nur drei Parameter des Realen anerkennt:

den objektiven Parameter:	Materie	(M)
den dimensionalen Parameter:	Raum	(S)
den relationalen Parameter:	Zeit	(T)

Es ist notwendig, eine vierte kosmische Komponente hinzuzufügen:

den operationalen Parameter:	Prozess	(P)

Solange wir P als unabhängigen Parameter ablehnen, können wir nur eine Technik bauen, die auf den Naturgesetzen basiert, die in den Beziehungen zwischen M, S und T inhärent sind. In diesem Fall werden wir die Sterne nie erreichen. Die Lichtgeschwindigkeit als obere Grenze für die Ausbreitung von physischen Ereignissen im Raum ist ein solches Naturgesetz. Und wohlgemerkt, dies wird in einem M-S-T-Universum *niemals* außer Kraft gesetzt werden. Andererseits, wenn wir einen vierten Parameter hinzufügen, gewinnen wir eine technische Dimension, in denen die Gesetze der Drei-Parameter-Welt nicht abgeschafft werden, aber einer Modulation zugänglich werden.

Ich begann meine "Achilles und die Schildkröte"-Serie mit einer Analyse des Problems der Bewegung, wie es Zenon als erster entworfen hatte. Erlauben sie mir daher, diesen letzten Teil mit einer Konfrontation zwischen der Theorie der Bewegung in einem Drei- und Vier-Parameter-Universum zu beschließen. Nach den klassischen Prinzipien beruht das fragliche Phänomen auf den Formeln: $S/M=T$, $S/T=M$, $MT=S$. Dies sind Formulierungen der grundlegenden Gesetze in einem Drei-Parameter-Universum (M-S-T). Natürlich ist P auch in diesen drei Formeln vorhanden, aber wie ich schon sagte, ist es über die anderen Parameter verteilt, und hat daher keinen benennbaren Wert als eigenständige Komponente. Diese Situation ist in der klassischen Wissenschaft unvermeidlich.

Diese Wissenschaft kann uns niemals eine adäquate Theorie des interstellaren Raumflugs liefern, weil das *verteilte* P den quantisierten Charakter von M nicht absorbieren kann. Und nichts kann dagegen unternommen werden, weil in einem M-S-T-Universum P nie aus der Verteilung herausgenommen werden kann. Und warum nicht? Nun, entsprechend unseren traditionellen Vorstellungen ist Materie Etwas und leerer Raum und ereignislose Zeit sind Nichts. Aber was ist ein Prozess P? Eine sehr peinliche Frage! Mit Sicherheit ist es nicht Nichts! Aber ist es ein Etwas? Nein, das können wir genauso wenig behaupten. Die Wissenschaft, die wir kennen, nutzt eine streng zweiwertige Logik. In anderen Worten: Es kann kein grundlegendes Drittes zwischen Etwas und Nichts (*some*thing and *no*thing) geben. In diesem System gibt es keinen Raum für ein unabhängiges P. Folglich ist die einzige Methode, ein Asyl für den vierten Parameter zu finden, seine Verteilung über die anderen Komponenten.

Jetzt haben wir endlich die ursprüngliche Quelle von Zenons Problem entdeckt: Er konnte Bewegung nicht definieren, weil sie weder ein Ding noch ein Nicht-Ding war (neither a thing nor a no-thing). Bewegung ist ein Ereignis oder Prozess. Mit anderen Worten: Zenons und unsere Analyse der Bewegung zeigte, dass dieses Phänomen nicht in den Begriffen von M, S und T definiert werden kann. Es zeigte Eigenschaften jenseits der Drei-Parameter-Realität unserer traditionellen Vorstellung von Natur. Wir haben deshalb einen vierten Parameter P eingeführt. Dies wurde rechnerisch durch Cantors transfinite Zahl $\subset$ für die Lösung von Zenons Paradox durchgeführt. Dies bietet uns eine neue Interpretation der Cantor'schen transfiniten Mengen. Cantors Alephs sind Zahlen, die nicht zu einem Drei-Parameter-Universum gehören. Sie repräsentieren die arithmetische Ordnung des vierten Parameters. Dies gibt uns – das ist zumindest die Hoffnung des Schreiber dieser Zeilen – eine "zufrieden stellende Korrelation der Ideen Cantors mit dem realen Universum" (Campbell).

Die Anerkennung des Prozesses (P) als neuen Parameter neben Materie, Raum und Zeit entspricht der Einführung der schon viel diskutierten "vierten Dimension", *durch die die ersten drei beliebig rotiert werden können*. Dieses Verfahren erlaubt die Substitution der Eigenschaften eines Parameters durch jene der drei anderen. Die Entwicklung einer physikalischen Wissenschaft, die diese Bedingungen erfüllt, ist jetzt nur noch eine Frage der Zeit. Und wenn diese Zeit kommt – "Why, the stars are as near as we wish them."

* * *

Endnoten (Teil 3):

[1]:
Es sollte jedoch nicht vergessen werden, dass dieses Konzept der Zeit sich nur auf die zeitliche Dauer unseres heutigen Universums bezieht, in dem T nun eine ungefähre Größenordnung von $3 \cdot 10^{17}$ Sekunden hat.

[2]:
In diesen Gleichungen bedeutet v die Geschwindigkeit von K relativ zu K' , c die Konstante der Lichtgeschwindigkeit, x die Bewegung entlang der x-Achse und t die Zeit.

[3]:
Eine Kombination aus einem ↔ Verhältnis der oberen Zeile mit einem der unteren Zeile ist nicht möglich, weil es unsere operationalen Prozeduren in Widersprüche bringen würde. Ein Beispiel soll dies demonstrieren. Wenn wir M zu S mit T zu S in einer Operation kombinieren, verlieren wir die Unterscheidung zwischen M und T, und die ↔'" Relation wird inexistent. Denn wenn sich M in S umwandelt, kann es sich nicht innerhalb des gleichen operativen Verfahren auch in T umwandeln. Das gleiche gilt für T.

[4]:
Isaac Asimov, The Stars, Like Dust. 1951 (Doubleday), pp.39/40. Deutsche Ausgabe:. Sterne wie Staub. 1960, ISBN 3-442-23016-0

[5]:
Die Umwandlung, die in (6) erfolgt, ist ziemlich elementar. Sie wird in zwei Schritten ausgeführt. Zuerst wird das Austausch-Verhältnis X $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$ Y ausgeführt. Das heißt, dass überall dort, wo X $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$ Y den Wert M hat, wird er in S geändert, und wo er S ist, wird er durch M ersetzt. Dann wird das Verfahren $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$, welches ursprünglich nur zwischen X und Y wirksam war, zwischen den eingesetzten Werten von X $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$ Y und den ausgetauschten Werten von (X $\overrightarrow{\boldsymbol{op}}$ Y) angewendet.

The text was originally edited and rendered into PDF file for the e-journal <www.vordenker.de> by *E. von Goldammer*

Zitiervorschlag: Gotthard Günther, Achilles und die Schildkröte, in: www.vordenker.de (Edition Sommer 2013 J. Paul, Hg.) – Erstveröffentlichung: Achilles and the Tortoise, Astounding Science Fiction, New York 1954: vol. LIII, No.5, p. 76-88 / vol. LIII, No. 6, p. 85-97 / vol. LIV, No. 1, p. 80-95 — Deutsche Übersetzung: *Rajko Aust*, Sommer 2013

vordenker
ISSN 1619-9324