— vordenker-archive —

Rudolf Kaehr

(1942-2016)

Title

Spaltungen in der Wiederholung

Archive-Number / Categories

1_18 / K02

Publication Date

1992

Keywords

Dissemination der natürlichen Zahlen, Ultra-Intuitionismus, Linearität und Positionalität

Disciplines

Theory of Science, Logic and Foundations of Mathematics, Artificial Intelligence and Robotics

Abstract

In contrast to the development of a variety of alternative logic calculi, few attempts have been made to deconstruct the concept of natural numbers. These are once the speculations about the finite of Warren McCulloch, as reported by Gotthard Günther, and the far-reaching approaches of the anti-traditionalist program of Aleksander Yessenin-Volpins and the constructions of Gotthard Günther in "Natural Numbers in Transclassical Systems" and in „Die Metamorphose der Zahl".

Citation Information / How to cite

Rudolf Kaehr, „Spaltungen in der Wiederholung" in: www.vordenker.de (Sommer Edition, 2017) J. Paul (Ed.) URL: http://www.vordenker.de/rk/rk_spaltungen-in-der-wiederholung.pdf — originally published in: Spuren, Heft Nr.40, Hamburg 1992, S. 44-47. [#]

Rudolf Kaehr [*]

Spaltungen in der Wiederholung

Angesichts der enormen Erfolge der Computerwissenschaften was Parallelisierung und Verteilung von algorithmischen Prozessen anbelangt und der noch rapideren Entwicklung der Computertechnologie bzgl. der Realisierung immer mächtigerer 'number crunchers' und der trotz allem wenig sichtbar werdenden echten Erfolge oder gar Durchbrüche in der Künstlichen-Intelligenz-Forschung, stellt sich erneut die Frage nach der Fundiertheit der Grundannahmen dieser Unternehmungen. Also insbesondere die Frage, nach der Adäquatheit der Mathematik und ihrer Theorie der natürlichen Zahlen als Basis der Konstruktion künstlicher Intelligenz oder gar künstlicher Lebewesen im Sinne der Bionik oder der Artificial-Life-Forschung.

Im Gegensatz zur Entwicklung einer Vielfalt alternativer Logikkalküle sind nur wenige Versuche zur Dekonstruktion der Konzeption der natürlichen Zahlen bekannt geworden. Es sind dies einmal die Spekulationen über das Endliche von Warren McCulloch, wie sie von Gotthard Günther berichtet werden und die weit ins Mathematische gehenden Ansätze des Anti-Traditionalistischen Programms Aleksander Yessenin-Volpins und die Konstruktionen Gotthard Günthers etwa in „Natural Numbers in Transclassical Systems“ und in „Die Metamorphose der Zahl“.

1 Linearität und Positionalität

> „Ein sog. Text ist demnach dann und nur dann tatsächlich als Text geschrieben, wenn er das Prinzip der Zeiligkeit, also der Linearität, der Eindimensionalität bewahrt. (...) Im allgemeinen entsteht jeder Text, ich sagte es schon, als lineare Zeichenfolge. (...) Wie der statistische Textfluss, so erscheint auch die logische Textstruktur als eindimensionale.“ (Bense, 1965, 300)

Obwohl in ihnen gegensätzliche Tendenzen wirksam sind, ist in allen phonetischen Schriftsystemen das Prinzip der Linearität und das Prinzip der Positionalität eng miteinander verbunden. Gerade in der Arithmetik, in der das Prinzip der Linearität am reinsten verwirklicht ist, spielt die Positionalität eine konstitutive Rolle für die Definition und Produktion der Zahlen. Der Motor einer geradezu überschwenglichen Generierung von Zahlen unter Beibehaltung der Linearität bietet das Positionalitätssystem mithilfe der Potenzfunktion. Durch sie lassen sich Zahlen beliebiger Größe erzeugen, ohne daß diese konkret, etwa als Strichfolgen, realisiert werden müssen.

---

* Kaehr, R. „Spaltungen in der Wiederholung.“ in: Spuren, Heft Nr.40, Hamburg 1992, S. 44-47. [#]

> „Die Verwendung mehrerer Ziffern und das (von den Indern konsequent auch für die Schrift ausgebildete) Positionssystem gestattet die rasche Entscheidung des Größer und Kleiner für weit höhere Zahlen, als die einfachen aus lauter hintereinander gesetzten Einsen bestehenden Zahlzeichen; es ist ihm praktisch gewaltig, doch nicht prinzipiell überlegen. Die Grundzahl des Zahlsystems, als welche uns die Zehn dient, ist in verschiedenen Kulturen verschieden. Die indische, vor allem die buddhistische Literatur schwelgt in den Möglichkeiten, durch das Positionssystem, d.h. durch Verbindung von Addition, Multiplikation und Potenzieren ungeheure Zahlen eindeutig zu benennen. Trotz aller wuchernden Phantastik ist doch etwas wahrhaft Großes darin lebendig; der Geist fühlt zum ersten Mal ganz seine Kraft, durch das Symbol über die Grenzen dessen hinauszufliegen, was sich anschaulich vollziehen lässt." (Weyl, 30)

Die Positionalität ist das kreative und spekulative Moment in der elementaren Arithmetik. Sie impliziert jedoch auch die Gefahr, einer Zerstörung des Prinzips der potentiellen Realisierbarkeit, durch ihre, der reinen Linearität entgegengesetzten Tendenz zur Verräumlichung. Insofern als sich die Arithmetik als Wissenschaft, d.h. als reine Arithmetik, wie sie im Gegensatz zur praktischen ägyptischen Arithmetik von den Griechen konzipiert wurde, für die Gesetze der Zahlen interessiert und damit unter der Dichotomie Theorie/Praxis steht und sich ihre Anwendung als sekundär erweist, entsteht zwischen Linearität und Positionalität kein Konflikt. Die Positionalität steht, soweit sie überhaupt ausgebildet ist, im Dienste der Linearität.

Als eigentliches Hindernis einer Weiterentwicklung des Denkens und seiner Notationstechniken erweist sich immer deutlicher deren eigenes Produktionsverhältnis, die Linearität.

> „Das rätselhafte Modell der Linie ist also gerade das, was die Philosophie, als sie ihren Blick auf das Innere ihrer eigenen Geschichte gerichtet hielt, nicht sehen konnte. Diese Nacht hellt sich in dem Augenblick ein wenig auf, wo die Linearität – die nicht der Verlust noch die Abwesenheit, sondern die Verdrängung des mehrdimensionalen symbolischen Denkens ist – ihre Unterdrückung lockert, weil sie allmählich die lange Zeit von ihr begünstigte technische und wissenschaftliche Ökonomie zu sterilisieren beginnt." (Derrida, 1974, 153)

Der Kantische Kritizismus, der das Denken vor der unkontrollierbaren Spekulation abgrenzen will, läßt das Prinzip der potentiellen Realisierbarkeit in seinem „Das: *Ich denke*, muß alle meine Vorstellungen begleiten können" nicht nur unangetastet, sondern gibt ihm eine transzendental-philosophische Begründung. Ebenso lassen auch die kritizistisch eingestellten Tendenzen der mathematischen Grundlagenforschung wie der Intuitionismus, der Operativismus, der Dialogismus und auch der Formalismus das Prinzip der potentiellen Realisierbarkeit und damit die Gültigkeit des Potentiell-Unendlichen unangetastet.

> „Etwas Neues aber geschieht, wenn ich die aktuell vorkommenden Zahlzeichen einbette in die *Reihe aller möglichen Zahlen*, welche durch einen Erzeugungsprozeß entstehen gemäß dem Prinzip, daß aus einer vorhandenen Zahl stets durch Hinzufügung der Eins eine neue, die nächstfolgende, erzeugt werden kann. Hier wird das Seiende projiziert auf den Hintergrund des Möglichen, einer nach festem Verfahren herstellbaren geordneten, wenn auch ins Unendliche offenen Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten. Dies ist der Standpunkt, den wir ... bei der mathematischen Begründung der Arithmetik durch das Prinzip der vollständigen Induktion einnahmen.
>
> Hierauf stützen wir uns, wenn wir von einer Billion = 10^{12} Papiermark sprechen. Denn mittels Definition durch vollständige Induktion gewinnen wir aus dem arithmetischen Urprozeß, der in n+1 verwandelt, die Operation der Multiplikation mit 10 und dann durch ihre 12-malige Anwendung, ausgehend von 1, die gewünschte Zahl 10^{12}. Die

Zahlzeichen 10 und 12 können wir dabei in Strichen hinschreiben; für 10^{12} geschah es niemals, und doch ´fingieren´ wir eine solche Zahl.“ (Weyl, 30)

Abgelehnt wird durch den Kritizismus das Prinzip der aktualen Realisierbarkeit, also das Aktual-Unendliche der Mengenlehre, jedoch nicht das Prinzip der Identifizierbarkeit und das Prinzip der potentiellen Realisierbarkeit von Zeichenreihen. Eine Kritik an diesen Prinzipien jeder Zeichenproduktion oder gar deren Elimination scheint absurd und selbstdestruktiv zu sein. Ist ein Element überhaupt identifizierbar, so ist diese Identifikation unbegrenzt iterierbar. Überall wo das Element, das Zeichen in einem Text auftaucht, läßt es sich identifizieren. Die Umkehrung davon ist im Prinzip der potentiellen Realisierbarkeit formuliert. Ist ein Element überhaupt gegeben, so läßt es sich unbeschränkt notieren. Identifikation und Iteration sind die zwei Minimalbedingungen der Semiotik.

Zeichenereignis und Zeichengestalt, token und type, usw. sind die basalen Dichotomien. Im Prozeß seines Gebrauchs verändert sich ein Zeichen nicht. Es hat kein Leben, nur Form. Der Calculus of Indications in Laws of form (G. Spencer Brown, 1969) faßt nochmals seine Grundgesetze zusammen und zwar durch die zwei Axiome:

Axiom 1: „The value of a call made again is the value of the call.“, d.h. ¬ ¬ = ¬

Axiom 2: „The value of a crossing made again is not the value of the crossing.“, d.h. $\neg\!\!\neg$ = .

Das erste Axiom faßt die zwei Prinzipien der Identifikation und der Iteration in einer Gleichung zusammen. Ist eine Form gegeben, dann läßt sie sich wiederholen; die Iteration einer Form ist eine Form, sie läßt sich als Form identifizieren. Das zweite Axiom regelt das Verhältnis von Form und Inhalt, type und token, etwa so: die Form einer Form ist ein Inhalt und ein Inhalt ist ein Inhalt und keine Form und wird als Inhalt nicht notiert. Daß die semiotischen Prinzipien der Identifikation und der Iterierbarkeit selbst noch in der Reflexionstheorie der Morphogrammatik eine dominante Rolle spielen, obwohl dort die klassische Logik schon verlassen wurde, jedoch noch nicht die klassische Arithmetik, zeigt sich auch in *„Cybernetic Ontology“* (Günther, Bd. I, p. 295-296).

Das Unendliche als Teil des Endlichen [*]

Die Säkularisierung des Jenseits des Potentiell-Unendlichen, sein „und so fort ins Unendliche“, in Richtung einer ultrafiniten, konkreten innerweltlich realisierbaren und nicht nur der Möglichkeit nach konkretisierbaren Arithmetik der natürlichen Zahlen muß die Bindung an das Prinzip der Linearität auflösen und die Symmetrie von Linearität und Positionalität in eine Asymmetrie zu Gunsten der Positionalität verschieben. Der Mechanismus der Säkularisierung des Unendlichen – die Arithmetik ist immer eine Theorie des Unendlichen – wird bestimmt durch Umkehrung und Verschiebung der Termini Linearität, Positionalität und das Endliche, das Unendliche. Zum einen wird das Verhältnis vom Endlichen zum Unendlichen bezüglich ihrer Mächtigkeit verkehrt: nicht das Endliche ist ein Teil des Unendlichen, im Gegenteil, das Unendliche ist ein Teil des Endlichen. So der amerikanische Begründer der Kybernetik nach einer Gesprächsaufzeichnung des Philosophen Günther

> „McCulloch seemed to imply that this order should be reversed and that infinity should be robbed of its primordial rank of awareness which is a product of the equally finite system of the physical brain.“ (Günther, 1975,15)

Und weiter:

* Anmerkung_vgo: Der Abschnitt „Das Unendliche als Teil des Endlichen“ sowie „Anmerkungen (Zettel)“ wurden von Rudolf Kaehr später hinzugefügt, d.h. in dem Text, der in *Spuren* (Heft Nr.40) 1992 veröffentlicht wurde, fehlen diese beiden Abschnitte.

„ ... not the finite is embedded in the Infinite but ... the Infinite – be it conceived as potential or actual – is, in the metaphysical sense, only a subordinated element of Finitude ...“ (ibd. 21).

Anmerkung (Zettel)

Daß das Unendliche im Endlichen eigebettet sei (McCulloch, Günther) ist zwar *very nice* oder auch *very surprising*, von der Denkfigur her jedoch banal, da nur eine Inversion des (intuitiven, nicht-mengentheoretischen, cantorschen) alten Satzes, der besagt, daß das Endliche im Unendlichen, daß das Endliche ein Teil des Unendlichen sei. So kühn diese Inversion auch sein mag, so stellt sie doch nur den ersten Schritt der Proemialisierung dar, der zweite, die Verschiebung und mit ihr die Paläonymie bzw. die Wiederholung des Alten, fehlt.

Der Clou ist nicht, daß das Unendliche teil des Endlichen ist, sondern daß das Endliche (des Unendlichen) „unentscheidbar“ ist. Bekanntlich ist jede endliche Menge entscheidbar (zumindest aufzählbar).

Anders: daß auch für das Endliche (des Unendlichen) das TND nicht als gültig vorausgesetzt werden kann. Daß also auch im Endlichen die Gesetze des Unendlichen gelten, daß die intuitionistische Kritik am Unendlichen sich für Endliche (des Unendlichen) wiederholen (s.a. Feasibility, Parikh).

Das Endliche des Unendlichen heißt: die Distribution des Unendlichen in der Kenogrammatik verwandelt das Unendliche, es wird zum ultra-intuitionistischen Unendlichen: endlich und unabgeschlossen zugleich.

2 Dissemination der Reihe der natürlichen Zahlen

Diese Verkehrung beruhigt sich nun nicht in einem strengen Finitismus für den das Unendliche jeglicher Art nichts anderes ist als eine Mythologie. Seit dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz ist das Programm des strengen Finitismus selbst als Mythologie entlarvt.

Die Einzigkeit der Reihe der natürlichen Zahlen wird aufgelöst und in eine Vielheit von Zahlenserien aufgefächert. Die Auffächerung der Linearität der natürlichen Zahlen, der Peano-Folgen, bedeutet nicht, daß die einzelnen distribuierten Linearitäten einen gemeinsamen Anfangspunkt haben, ihre Dissemination wird durch die polykontexturale Logik geregelt.

„Zunächst muß festgehalten werden, daß in einem polykontexturalen Weltsystem jede Universalkontextur ihre eigene Peano-Folge hat, die ausschließlich auf sie bezogen ist und die rein intrakontextural abläuft. Und da wir prinzipiell eine unbegrenzte Anzahl von Universalkontexturen stipulieren müssen, so ergibt sich daraus, daß wir auch mit einer unbeschränkten Vielheit von solchen individuellen Peano-Folgen zu rechnen haben, die gegeneinander durch die jeweiligen Kontexturgrenzen abgeschirmt sind.“ (Günther, Bd. II, p.275)

Die distribuierten Peano-Folgen werden nicht in einem *summum bonum* versammelt, jede einzelne hat ihren eigenen Anfang, diese sind also nicht hierarchisch, sondern heterarchisch organisiert. Die Heterarchie nun ist die von der Fixierung auf die Linie entbundene Positionalität wie sie in der polykontexturalen Logik durch das Orts- und Stellenwertprinzip, d.h. durch den Kontexturierungs- und den Kontextuierungsprozeß definiert wird. Die kontexturale Abgrenzung der einzelnen Peano-Folgen voneinander bedeutet nicht, daß sie isoliert bleiben, vielmehr entsteht die Möglichkeit eines transkontexturalen Übergangs: Eine Zahlenfolge beginnt in einer Kontextur, stößt auf ein Obstakel und setzt sich in einer anderen Kontextur fort. Es sind also zwei differente Zählprozesse zu unterscheiden; der intrakontexturale, der innerhalb einer Kontextur abläuft und der transkontexturale, der die Kontexturen selbst als Zähleinheiten hat.

Durch die Möglichkeit des transkontexturalen Übergangs wird der Überstieg vom Endlichen ins Unendliche mit endlichen Mitteln vollzogen. Denn intra-kontextural gibt es keine noch so große Zahl, die aus ihrer Kontextur hinausführt. Dem transkontexturalen Übergang entspricht ein Sprung für den keine lineare Iteration einspringen kann. Die Eigenschaft der translinearen Zahl ist für die lineare Zahl genau so transzendent und unerreichbar wie das Unendliche. Insofern hat die neue Zahl der alten gegenüber wegen ihrer Diskontexturalität, d.h. wegen der Kontexturschranke, die zwischen ihnen liegt, die Qualität des Infiniten. Als solche und innerhalb ihrer Kontextur ist die infinite Zahl jedoch wiederum eine endliche Zahl und damit Ausgangspunkt für neue Iterationen sowohl intra- wie transkontexturaler Art. Der Ultra-Intuitionismus ist nicht ein sog. strenger Finitismus, noch hat er etwas mit den Nonstandard-Modellen der Arithmetik zu tun, sondern er ist ein Ultra-Finitismus.

Die Begriffe finit/infinit, endlich/unendlich sind komplementäre Begriffe. Es gibt kein Endliches ohne Unendliches und umgekehrt. In einer monokontexturalen Logik und Arithmetik läßt sich jedoch deren Dialektik nicht entfalten. Das mathematische Interesse ist jeweils einseitig auf das Unendliche, was ihr Telos anbelangt, ausgerichtet. Die Ordnung der beiden Begriffe ist daher starr und zeigt sich in einer hierarchischen Unterordnung des Endlichen unter das Unendliche. Die Polykontexturalität bietet den Spielraum für die freie Entfaltung dieser Dialektik. Daher kann das, was in einer Kontextur per se als Unendliches gesetzt ist, in einer anderen Kontextur als ein Endliches gegeben sein, ohne daß sich die beiden Bestimmungen gegenseitig stören. Durch einen Kontexturwechsel kann das für sich Endliche zum Unendlichen werden und umgekehrt. Die Dekonstruktion der komplementären Begriffe finit/infinit extendiert diese um die neue Dichotomie transfinit/ultrafinit. Dabei entspricht kurz gesagt, dem Ultrafiniten die Konzeption des strengen Finitismus, jedoch ohne dessen Restriktionen und dem Transfiniten die Cantorschen Zahlenkonstruktionen, jedoch ohne ihre anti-operative Spekulation.

3 Zur Arithmetik der Arithmetik

Bekanntlich sind seit Aristoteles für das herrschende Denken alle philosophischen, semiotischen und mathematisch-logischen Konzepte der Zahl dem Linearitätsprinzip treu geblieben. Damit subsumieren sie sich alle unter die aristotelische Konzeption von Zahl, Zeit und Zeichen. Eine leichte Abweichung vom dichotomisch-logozentrischen Zahlkonzept findet sich bei der auf Peirce zurückgehenden Fassung der Zahl als *„triadische Zeichenzahl“* in Benses *„Zeichenzahl und Zahlensemiotik“*. Bense entwickelt allerdings nicht eine von der Linearität entbundene semiotische Zahlentheorie, sondern eine triadisch-trichotome Begründung der vorgegebenen Konzeption der natürlichen Zahlen. Gegenläufig zur Dissemination der linearen Arithmetik entsteht damit die Notwendigkeit einer zusätzlichen Arithmetik, die den Zusammenhang der Vielheit der polykontexturalen Arithmetiken regelt, also eine Arithmetik der Arithmetik. Diese Arithmetik, die *second order arithmetics*, die die Zählbarkeiten der disseminierten arithmetischen Systeme zählt, muß frei sein von der Materialgebundenheit der gezählten Arithmetiken. Die Materialgebundenheit ist dabei nicht empirisch zu verstehen, sondern gibt die qualitative und kontexturale Abgrenzung der verschiedenen Arithmetiken an. Diesem interkontexturalen, von jeglichem Sinnhaften und Arithmetischen entbundenen Bereich entspricht die Kenogrammatik (Kaehr,1991). Der neue Zahltypus der 'second order arithmetics', die „philosophischen Zahlen“ , hat somit zum „Thema nicht die Wahrheit des Seins des Seienden, sondern die *Wahrheit der Negativität des Nichts*“ (Günther, Bd. III, 285).

4 Der Ultra-Intuitionismus Jessenin-Volpins

„Polysemie mathematique? Jamais. Les assemblage designe qui constituent en leur materialité les textes mathematique sont univoque par construction.“ (Desanti, 37)

Eine erste mathematische Dekonstruktion der Linearität der Reihe der natürlichen Zahlen leistet der Ultra-Intuitionismus des russischen Mathematikers Aleksander S. Yessenin-Volpin.

Die unkritische Übernahme des Prinzips der potentiellen Realisierbarkeit aus der Mathematik in die Künstliche-Intelligenz-Forschung bringt diese in Widerspruch zu ihrem eigenen Prinzip der Machbarkeit. Machbar ist danach nur das, was eindeutig und finit formulierbar ist (McCulloch-Pitts, 1965).

Der Ultra-Intuitionismus ist in der Lage zu zeigen, daß nicht einmal die natürlichen Zahlen finit und eindeutig definierbar sind. Die natürlichen Zahlen sind jedoch der Prototyp einer konstruktiven, d.h. machbaren Theorie. Die Einführung der natürlichen Zahlen unter dem Postulat der Einzigkeit der Reihe der natürlichen Zahlen führt zu einem Zirkel: die einzuführenden Zahlen werden bei der Einführung als schon existent und disponibel vorausgesetzt. Zirkuläre Definitionen sind jedoch auch für die Arithmetik katastrophal, sie trivialisieren das System. Zirkularität darf dabei jedoch nicht mit der Rekursivität der Definitionsschemata verwechselt werden. (Kaehr, 1980, 44)

> „I ask: why has such entity as 10^{12} to belong to a natural number series? Nobody has counted up to it (10^{12} seconds constituting more than 20000 years) and every attempt to construct the 10^{12}-th member of sequence 0, 0', 0'',... requires just 10^{12} steps. But the expression 'n-steps' presupposes that n is a natural number i.e. a number of a natural number series. So this natural attempt to construct the number 10^{12} in a natural number series involves vicious circle. This vicious circle is no better than that involved in the impredicative definitions of set theory: and if we have proscribed these definitions we have to proscribe the belief in existence of a natural number10^{12} too.“ (Yessenin-Volpin, 1970, 4–5)

D.h. eine Zahl Zn wird definiert als die n-fache Anwendung der Nachfolgeoperation X auf die Anfangszahl (Null) Y, also

$$Xn\ Y = \underbrace{X(X(...(XY)...))}_{\text{n-fach X (n ist Schrittzahl)}} \text{ für } n > 0$$

$$\text{und } X0\ Y = Y$$

Die Zahl 10^{12} wird danach definiert durch die 10^{12}-fache Anwendung der Nachfolgeoperation auf die Anfangszahl:

$$Z_{10}{}^{12} = X10^{12}\ Y = \underbrace{X(X(...(XY)...)}_{10^{12}\text{X-fach}}$$

Woher weiß man, daß10^{12} eine natürliche Zahl ist? Offensichtlich muß schon vor der Konstruktion der Zahl 10^{12} bekannt sein, daß sie eine in der Reihe der natürlichen Zahlen vorkommende Zahl ist, sonst ließe sie sich ja nicht als Schrittzahl einsetzen. Würde sie in der Zahlenreihe nicht vorkommen, würde sie durch die Schrittzahl gerade konstruiert und würde somit im Widerspruch zur Annahme doch vorkommen. Kommt sie jedoch vor, so entsteht ein Zirkel, da sie, will man sie konstruieren, sich selbst als Schrittzahl voraussetzt.

Dieser Zirkularität ist nur zu entgehen, wenn die traditionelle Annahme der Eindeutigkeit der Reihe der natürlichen Zahlen aufgegeben wird und eine Vielzahl von Zahlenreihen und notwendigerweise auch eine Vielzahl von korrespondierenden Logiksystemen zugelassen werden.

Logik und Arithmetik müßen als gleichgestellt verstanden werden, als Antworten zweier differenter gleichurprünglicher Fragen, die heterarchisch in der Kenogrammatik fundiert sind. Die Dekonstruktion der Arithmetik und Semiotik muß entsprechend auf die Logik ausgedehnt werden. Das letztere wird allerdings vom Ultra-Intuitionismus nicht eingelöst. Die ultra-intuitionistische Kritik an den Grundlagen der Mathematik und wegen ihrer Radikalität, an allen semiotischen Systemen überhaupt, wird von der etablierten Mathematik und Semiotik wie Hao Wang (1974, 290) berichtet, als „an elaborate joke“ abgetan.

NACHTRAG 1996 [*]

Mitteilungen aus dem Internet

„I should temper my gospel fervor enthusiasm for PRA by observing that while I agree with Tait (Finitism, J. of Philosophy, 1981, 78, 524-546) that PRA is THE NECESSARY AND SUFFICIENT logic for talking about logics and proofs, *there exists at least someone who refuses to believe in PRA (Yessenin-Volpin*, The Ultra-Intuitionistic Criticism ..., Intuitionism and Proof Theory, North-Holland, 1970, pp. 3-45).

> “But this fellow also refuses to believe in 10^{12}, which seems to fly in the face of teraflops and terabyte memories.” Bob (Robert S. Boyer <boyer@CLI.COM>)
>
> “There is no safety in numbers, or in any thing else.” Thurber.

Wie wenig Verständnis für die im Text behandelte Problematik angesichts des „Computerzeitalters“ zu erwarten ist, zeigt das obige Zitat von Bob.

Woher wissen wir von den *teraflops and terabyte memories*?

Wer hat sie gezählt und wie?

Selbstverständlich sind sie berechnet worden und die Ergebnisse bezweifelt niemand – gewiß sind sie auf der Basis der nicht faktisch begründbaren Potenzfunktionen berechnet worden und nur diese sagen aus, wie viele Flops pro Sekunde in der oder durch die Maschine laufen.

Die Evidenz, die die Basis der Begründung abgeben sollte ist in den Rechner verschoben worden.

Warum auch nicht?

Doch eine rechnerfundierte Mathematik – unabhängig von egologischer Fundierung – existiert heute noch nicht.

Analog ist die Problematik der maschinellen Lösung des Vierfarben-Problems.

Daß zumindest ein qualitativer Bruch zwischen einer egologisch und einer maschinal begründeten Mathematik besteht, sollte nicht ganz übersehen werden.

Noch bleibt der Beweis der Äquivalenz der beiden aus.

NACHTRAG-Ende

5 Dekonstruktion des Prinzips der Induktion

Das Prinzip der arithmetischen Linearität wird auch im Prinzip der vollständigen mathematischen Induktion (IP) vorausgesetzt. Es lautet: Wenn eine Eigenschaft P dem Anfangselement O zukommt und wenn aus der Tatsache, daß sie einem beliebigen Gegenstand n zukommt, folgt, daß sie auch dem Gegenstand n+1 zukommt, so kommt die Eigenschaft P allen Gegenständen zu – symbolisch:

$$\text{IP: } P(0) \wedge \forall_n (P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall_n P(n).$$

* Anmerkung_vgo: Der Abschnitt „Nachtrag“ wurden von Rudolf Kaehr später hinzugefügt, d.h. in dem Text, der in *Spuren* (Heft Nr.40) 1992 veröffentlicht wurde, fehlt dieser Abschnitt.

Der Ultra-Intuitionismus stellt das Prinzip der Linearität in Frage. Sein erster Schritt einer Dekonstruktion ist eine Negation der Gültigkeit des Induktionsprinzip

$$\text{(non-IP)}\ \neg(P(0) \wedge \forall_n (P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall_n P(n))$$

Unter der Voraussetzung einer wahrheitsdefiniten klassischen Logik läßt sich non-IP umformen zu

$$P(0) \wedge \forall_n (P(n) \rightarrow P(n+1)) \wedge \exists_n \neg P(n)$$

In Worten: Das Prädikat P gilt für das Anfangselement und für den Nachfolgeschritt von n zu n+1 für alle n und es gibt ein Element n, für das das Prädikat P nicht zutrifft.

Die Existenz eines Elements n, das nicht die Eigenschaft P besitzt, ist unter der Voraussetzung der Linearität absurd, zumal es für non-IP keine kleinste, nicht-realisierbare Zahl gibt. Die Implikation $P(n) \rightarrow P(n+1)$ gilt für alle n.

> „Die Abstraktion der faktischen Unendlichkeit, schreibt Petrov, läßt sich ziemlich schwierig mit der Intuition in Einklang bringen, ...“ (Petrov, 1971,13)

Daß sich eine Erweiterung der Arithmetik und der Semiotik im Sinne einer Entbindung von der menschlichen egologischen Subjektivität nicht nach Maßgabe der Intuition, dem „Prinzip aller Prinzipien“ (Husserl), vollziehen läßt, ist wiederum naheliegend.

Der Teilsatz '$\exists_n \neg P(n)$' von non-IP verliert dann seine Absurdität, wenn er als Anfangsglied eines zweiten Dekonstruktionsschrittes verstanden wird. '$\neg\exists_n P(n)$' bedeutet, daß 'P(n)' nicht im eigenen Linearitätssystem, sondern in einem anderen existiert. Die Ungültigkeit im Linearitätssystem L_1 koinzidiert mit der Gültigkeit im Linearitätssytem L_2. Daß es eine Zahl gibt, die auf der Linie L_1 nicht existiert, obwohl es keine kleinste Zahl in L_1 gibt, für die das gilt, heißt, daß die betreffende Zahl sich auf einer anderen Linie befindet. Danach haben Zahlen sowohl Vorgänger und Nachfolger als auch Nachbarn. Ihre Konzeption widerspricht jeder Intuition, da sie ihre Eindeutigkeit verloren haben und sich nicht mehr in einer Präsenz versammeln lassen. Ihre Einführung heißt daher auch ultra-intuitionistisch. So ist etwa die Zahl Eins sowohl Anfang eines Zahlensystems, wie auch beliebiger Teil, z.B. Ende, einer anderen die erste kreuzenden Zahlengeraden.

Der Ultra-Intuitionismus im Sinne Yessenin-Volpins ist nicht identisch mit einem strengen Finitismus. Sein Ziel ist die Entgründung der Mathematik und nicht ihre Reduktion auf ein technisch disponibles klassisches Fragment.

6 Zur Machbarkeit der Großen Zahlen

Große Zahlen, wie sie zur Konstruktion künstlicher Intelligenz notwendig sind, werden leicht durch die Potenzfunktion eingeführt: $e(m, n) = m^n$. Die Potenzfunktion läßt sich verstehen, als zweite Applikation des Positionalitätsprinzips. Ihre Elemente sind Zahlen, die durch die erste Applikation des Positionalitätsprinzips mithilfe eines finiten Zeichenrepertoires, als lineare Zeichenreihen gebildet wurden. Die Potenzierung dieser Zahlen erzeugt wiederum Zahlen, d.h. eine Potenzzahl wird als Zahl verstanden. Damit wird behauptet, daß die Potenzzahl auf eine Zahl abbildbar ist. Gewiss ist die Potenzzahl 10^2 auf die Zahl 100 abbildbar, d.h.10^2 =100. Es lassen sich jedoch sehr leicht Potenzzahlen hinschreiben, die ihrer Größe wegen, genauso wenig faktisch als Zahl im Positionssystem ausgeschrieben werden können, wie die Zahl 1 Billion als Strichfolge.

Parikh hat nun in seinem Research Report „Existence and Feasibility“ bewiesen, daß die Potenzfunktion nicht faktisch realisierbar ist. D.h., das Prädikat $P(x, y, z)$: $x^y = z$ ist faktisch realisierbar, jedoch nicht die Aussage, $\forall_x\forall_y\exists_z (x^y = z)$. Mögen zwei Zahlen m, n faktisch realisierbar sein, so muß es die Potenz e(m, n) nicht sein.

Dieses Resultat hat nun direkte Folgen für den metatheoretischen Limitationssatz von Gödel. Bekanntlich wird er über die Arithmetisierung der Syntax gewonnen. Diese wiederum funktioniert nur dank der Potenzfunktion: den Zeichen des Lexikons des formalen Systems werden Primzahlen-zugeordnet, jeder Aussage, d.h. Zeichenreihe, entspricht dadurch eine Zahlenfolge, dieser wird nun eindeutig eine Zahl, die Gödelzahl. Der Gödelsche Satz ist also nicht faktisch realisierbar. Er hat zur Voraussetzung die Abstraktion der potentiellen Realisierbarkeit. Die Kette Mathematik/Ideologie (Badiou,1969) setzt sich fort mit der Dekonstruktion der Ideologie der Linearität und der Entwicklung einer trans-linearen Arithmetik. Ist einmal das Limitationstheorem relativiert auf einen bestimmten historischen Typus einer allgemeinen Symbolisierungsweise, dann verlieren auch seine apologetischen Applikationen etwa bei der Frage, ob bewußtseinsanaloge Maschinen möglich seien oder nicht ihre Relevanz und Stringenz.

Das Prinzip der künstliche Intelligenzforschung, das Prinzip der faktischen Machbarkeit (McCulloch-Pitts) trifft also nicht einmal für den Prototypen einer konstruktiven Theorie, d.h. für das elementarste Instrumentarium der KI-Forschung selbst zu. Die Bindung der Machbarkeit an die Eindeutigkeit ist nicht einmal für die Arithmetik realisierbar. Eindeutigkeit heißt logisch Zweiwertigkeit und Hierarchie. Es ist von der KI-Forschung übersehen worden, daß McCulloch sich schon 1945 gezwungen sah, das Hierarchieprinzip durch ein komplementäres Heterarchie-Prinzip, das kein *summum bonum* kennt, zu ergänzen. Heterarchien erzeugen in der Logik jedoch Zirkularitäten und verstoßen damit gegen das Hauptgesetz der klassischen Logik, gegen die Transitivität der Implikation und die Monotonie der Folgerungsrelation.

Dadurch daß die Potenzfunktion über das faktisch Realisierbare hinausreicht, ist sie das Produkt einer spekulativen Reflexion. Die graphematische Dekonstruktion der Potenzierung tangiert nun nicht ihre spekulative Kraft große und gar super-astronomische Zahlen zu setzen, sondern ihre logozentrischen Voraussetzungen, Atomismus und Linearität, die der Realisation ihrer Potenz Grenzen setzten, die ihr wesensfremd sind. Die Linearität ist ein Produkt der Verdrängung und Unterdrückung der prinzipiellen Tabularität skripturaler Systeme.

Eine freiere Entfaltung erhält die Positionalität der Potenzfunktion in einer tabularen und holistischen Arithmetik. Potenzzahlen beliebiger Größe lassen sich immer durch Distribution ihrer Komponenten über verschiedene Kontexturen tabular-faktisch, d.h. ultra-finit realisieren. M.a.W., die Nicht-Realisierbarkeit einer Zahl in einer Arithmetik einer bestimmten Kontextur ist ein Obstakel und erzwingt einen transkontexturalen Übergang. Daher dekonstruiert sich eine nicht-realisierbare Potenzzahl in

1. ihre faktisch-realisierbare Komponenten, Basis und Exponent und
2. in die faktisch-realisierbaren transkontexturalen Übergänge; also in ein arithmetisch-logisches Verbundsystem realisierbarer Operationen einer polykontexturalen Theorie natürlicher Zahlen.

Die Angst des logozentrischen Denkens vor dem Nichtsein, dem Nichts und der Leere, haben den Gebrauch der Positionalität an die Linearität gebunden. Der virtuose Gebrauch der Null und die Einsicht in ihre Vielfältigkeiten definieren anstehende Aufgaben einer grammatologischen bzw. graphematischen Grundlagenforschung in Mathematik, Logik und Computerwissenschaften.

Einen 'nicht-überschwenglichen Gebrauch' der Möglichkeiten der Positionalität, einen Gebrauch, der nicht versucht „im Transfiniten aus der Linie einen Kreis zu erträumen“ (Meyer, 1983, 159), sondern einen innerweltlich realisierbaren, der den arithmetischen Text der lebenden Textur 'living tissue' einzuschreiben vermag, kann nur durch die Befreiung der Positionalität von ihrer Gebundenheit an die Linearität der unmittelbaren Gegebenheit der Zeichen, durch ihre Vermassung, d.h. durch unbeschränkte Zerstreuung und Vermittlung, geschehen.

7 Literatur

- Bense, M., esthetica, agis, Baden–Baden, 1982
- Badiou, A., Le Nombre et els nombres, Paris 1990
- Desanti, J.T., Materialisme/Epistemologie. in: Tel Quel 58, Paris 1974

- Günther, G., Number and Logos, Ms., 1975 Die Metamorphose der Zahl, Ms., 1984
- Herken, R. (Ed.), The Universal Turing Machine, Oxford 1988
- Ifrah, G., Unviersalgeschichte der Zahl, Campus, Frankfurt/M New York, 1986
- Krämer, S., Symbolische Maschine, Darmstadt 1988
- Martin, G., Klassische Ontologie der Zahl, Köln 1956
- McCulloch, W., Embodiments of Mind, MIT Press 1965
- Meyer, E., Zählen und Erzählen, Medusa, Berlin 1983

vordenker
ISSN 1619-9324

How to cite:
Rudolf Kaehr, "Spaltungen in der Wiederholung" www.vordenker.de (Sommer Edition, 2017) J. Paul (Ed.)
URL: http://www.vordenker.de/rk/rk_spaltungen-in-der-wiederholung.pdf