Prof. Dr. Alfred Toth

Komplexe semiotische Zahlen

1. In einem Vortrag mit dem Titel "Die qualitative Zahl" hatte der 2014 verewigte Berliner Mathematiker Dr. Gerhard G. Thomas die qualitative Zahl der von Gotthard Günther begründeten polykontexturalen Logik als "komplexe Zahl"

Q = (Ort, Symbol, Relation, Struktur, Wandel)

definiert. Wie bekannt, ist Q eine Gestaltzahl, die in drei verschiedenen Zählweisen auftritt (vgl. Günther 1979, S. 283 ff.). Als Protozahl zählt für die Kategorie Symbol von Q lediglich deren Kardinalität. Als Deuterozahl zählt für die Kategorie Symbol von Q nur die Verteilung der Symbole. (Damit ist allerdings die Kardinalität eingeschlossen.) Erst als Tritozahl wird die Position der Symbole innerhalb von Q relevant. Diese drei Gestaltzahlen, die durch Q einheitlich definiert wurden, sind somit nach den übrigen Kategorien von Q spezifizierte Peanozahlen, d.h. man kann die Peanozahlen auf Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen abbilden wie man umgekehrt Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen auf Peanozahlen abbilden kann.

So lauten die Peano-Zahlen P = (0, 1, 2, 3)

als Proto-Zahlen

0, (00, 01), (000, 001, 002), (0000, 0001, 0012, 0123),

als Deutero-Zahlen

0, (00, 01), (000, 001, 002), (0000, 0001, 0011, 0012, 0123)

und als Trito-Zahlen

0, (00, 01), (000, 001, 010, 011, 012), (0000, 0001, 0010, 0011, 0012, 0100, 0101, 0102, 0110, 0111, 0112, 0120, 0121, 0122, 0123).

2. Qualitative Zahlen der Form

R = P(ω)

sind die in Toth (2016) zuletzt behandelten ortsfunktionalen Zahlen. Wie man sieht, sind sie Teilstrukturen von Q, mit denen sie allerdings nur den Ort ω gemeinsam haben. Sie sind daher auch keine Gestaltzahlen, sondern eine Art von "geometrischen" Zahlen, für die sich drei Zählweisen unterscheiden lassen: die lineare oder adjazente, die orthogonale oder subjazente und die diagonale oder transjazente. Wegen der großen Vielfalt der ortsfunktionalen Zahlen sollen im folgenden lediglich die Peano-Zahlen P = (0, 1) auf diese von uns R-Zahlen genannten Zahlen abgebildet werden.

So lauten die Peano-Zahlen P = (0, 1) als adjazente R-Zahlen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_i & y_j & & y_i & x_j & & y_j & x_i & & x_j & y_i \\
\emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_j & \emptyset_i & & \emptyset_j & \emptyset_i \\
& & \times & & & \times & & & \times & & \\
\emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & \emptyset_j & & \emptyset_j & \emptyset_i & & \emptyset_j & \emptyset_i \\
x_i & y_j & & y_i & x_j & & y_j & x_i & & x_j & y_i,
\end{array}$$

als subjazente R-Zahlen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & x_j & & \emptyset_j & x_i & & x_j & \emptyset_i \\
y_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & y_j & & \emptyset_j & y_i & & y_j & \emptyset_i \\
& & \times & & & \times & & & \times & & \\
y_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & y_j & & \emptyset_j & y_i & & y_j & \emptyset_i \\
x_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & x_j & & \emptyset_j & x_i & & x_j & \emptyset_i
\end{array}$$

und als transjazente R-Zahlen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & x_j & & \emptyset_j & x_i & & x_j & \emptyset_i \\
\emptyset_i & y_j & & y_i & \emptyset_j & & y_j & \emptyset_i & & \emptyset_j & y_i \\
& & \times & & & \times & & & \times & &
\end{array}$$

$Ø_i \quad y_j \qquad y_i \quad Ø_j \qquad y_j \quad Ø_i \qquad Ø_j \quad y_i$

$x_i \quad Ø_j \qquad Ø_i \quad x_j \qquad Ø_j \quad x_i \qquad x_j \quad Ø_i$.

Wie man erkennt, liegt der wesentliche Unterschied zwischen den beiden komplexen qualitativen Zahlen

Q = (Ort, Symbol, Relation, Struktur, Wandel)

und

$R = P(\omega)$

darin, daß in R sowohl die logische Subjekt- als auch die logische Objekt-Position iteriert werden kann, während in Q nur die logische Subjekt-Position iterierbar ist. Der Grund dafür liegt darin, daß in Q für jede Kontextur die zweiwertige aristotelische Logik unangetastet weiterhin gilt, d.h. es wird sowohl in der mono- als auch in der polykontexturalen Logik von der Dichotomie

$L = [0, 1]$

ausgegangen, für die das Grundgesetz des Tertium non datur die Unvermitteltheit der beiden Werte garantiert. Dagegen basieren die R-Zahlen nicht auf absoluten Werten für subjektive Subjekte und für objektive Objekte, sondern auf subjektiven Objekten und objektiven Subjekten, d.h. beim Übergang von den Peano-Zahlen zu den R-Zahlen (nicht aber zu den Q-Zahlen!) findet die Transformation

$$L \to \begin{pmatrix} L_1 = [0, [1]] & L_1^{-1} = [[1], 0] \\ L_2 = [[0], 1] & L_2^{-1} = [1, [0]] \end{pmatrix}$$

statt.

3. Eine ganz besondere Stellung unter den bis heute bekannten qualitativen Zahlen nehmen die von Max Bense definierten "Zeichenzahlen" ein, die er, wohl etwas unglücklich, auch und hauptsächlich als "Primzeichen" einführte (vgl. Bense 1981, S. 17 ff.). Darin werden die drei Kategorien der numerischen peirceschen Zeichen-Relation

$Z = (.1., .2., .3.)$

(lies: Erstheit, Zweitheit, Drittheit) wie folgt auf mathematische Zahlen abgebildet

$.1. \rightarrow n$ Kardinalzahlen

$.2. \rightarrow n.$ Ordinalzahlen

$.3. \rightarrow <n>$ Relationszahlen

(die Notation der drei Zahlen stammt von uns), wobei Bense die drei Abbildungen wie folgt definiert (1981, S. 26)

$f\colon (.1. \rightarrow n)$ "Repräsentation als Mächtigkeit"

$g\colon (.2. \rightarrow n.)$ "Repräsentation als Nachfolge"

$h\colon (.3. \rightarrow <n>)$ "Repräsentation als Konnex".

Da Bense als Beispiele für Konnex "Folge, Reihe, Gleichung, Funktion" angibt (a.a.O.), verbleibt die Qualität dieser Zeichenzahlen innerhalb der Monokontexturalität der quantitativen Mathematiken der Peano-Zahlen. Daß dies die Intention Benses war, geht am deutlichsten aus seiner expliziten Einführung der numerischen Zeichenrelation mit Hilfe der Peano-Axiome hervor (vgl. Bense 1975, S. 167 ff.). Qualitativ sind diese Zahlen also lediglich durch die Abbldungen f, g, h, welche einen expliziten Zusammenhang zwischen der Qualität der Zeichen als Domänen- und der Quantität der Zahlen als Codomänenelementen etablieren.

Man kann nun aber einen Schritt weitergehen und die benseschen Zeichenzahlen ebenfalls als komplexe Zahlen definieren. Wir wollen sie S-Zahlen nennen

$S_1 = (n, M)$

$S_2 = (n., O)$

$S_3 = (<n>, I)$,

darin M, O und I für die peirceschen semiotischen Kategorien des Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezuges stehen. Da

$M \rightarrow O := \alpha$

$O \rightarrow I := \beta$

gilt (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.), kann

$S = (S_1, S_2, S_3)$

in kategorietheoretischer Notation durch

$S_1 \rightarrow S_2 = ((n \rightarrow n.)\ \alpha)$

$S_2 \rightarrow S_3 = ((n. \rightarrow <n>)\ \beta)$

und somit die ganze S-Relation vermöge Transitivität durch

$S = S_1 \rightarrow S_3 = (n \rightarrow <n>, \beta\alpha)$

mit der Konversen

$S^{-1} = S_3 \rightarrow S_1 = (<n> \rightarrow n, \alpha°\beta°)$

definiert werden. Während Abbildungen der Q- auf die R-Zahlen bzw. umgekehrt weitgehend unerforscht sind, war es Rudolf Kaehrs Verdienst, durch Kontexturierung der Zeichenzahlen eine polykontexturale Semiotik wenigstens in ihren wichtigsten Grundlagen eingeführt zu haben (vgl. Kaehr 2009), und zwar in engster vierjähriger Zusammenarbeit zwischen dem von Rudolf Kaehr geleiteten ThinkartLab und meinem STL (semiotisch-technischen Laboratorium) in den Jahren 2008 bis 2012. Das bedeutet also, daß die S-Zahlen auf die Q-Zahlen und umgekehrt abbildbar sind.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. Bd. II. Hamburg 1979

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotic Short Studies. Glasgow 2009

Thomas, Gerhard G., Die qualitative Zahl. Harmonik-Vortrag, 12.7.1997

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Einführung in die elementare qualitative Arithmetik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2016

13.8.2016